

NIEUWE DELTA-T

5/6

EXPONENTIËLE EN LOGARITMISCHE FUNCTIES - BASISDEEL
LEERPLAN B/C

Jos Casteels
Danielle De Vos
Frederik Smessaert
Katrijn Van Eekert
Carl Van Hove

Plantyn

DIT BOEK BIEDT MEER

ACTIVEER ONLINE IN 3 STAPPEN

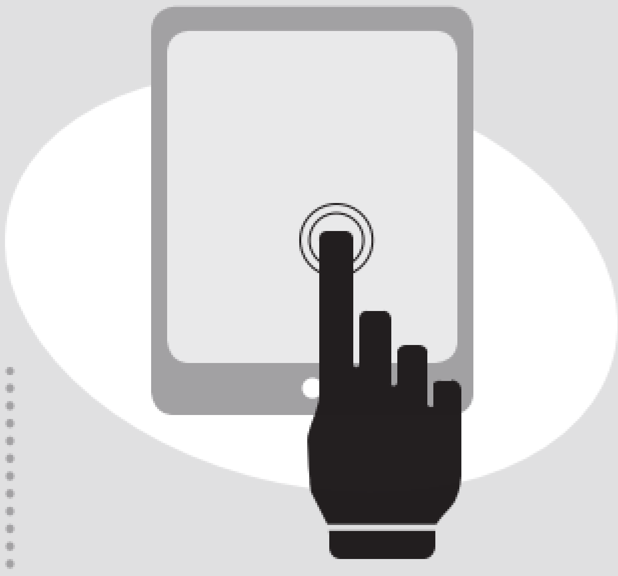
1

KRAS

Op de achterkant van dit boek vind je **een code onder een kraslaag.**
Met die code kun je je boek online activeren.



2



ACTIVEER

Ga naar www.scoodle.be/activeer
en volg de instructies.

3

KLAAR!

Nu is je boek online geactiveerd.
Zo heb je toegang tot de digitale content bij deze uitgave.



VOORWAARDEN

Nadat je de code geactiveerd hebt, heb je een schooljaar lang toegang tot de digitale content bij deze uitgave. Uitgaven waarvan de code gekrast is, worden niet teruggenomen of omgeruild. Bij vragen over de activatie of het gebruik kun je steeds terecht bij onze helpdesk, via helpdesk.plantyn.com.

Nieuwe Delta-T

leermap 5/6
exponentiële en logaritmische functies
basisdeel

Jos Casteels
Danielle De Vos
Frederik Smessaert
Katrijn Van Eekert
Carl Van Hove

Plantyn

Opmaak omslag: The Line
Opmaak binnenwerk: Composition
Illustraties: Vera Smeulders, Stefaan Provijn
Omslagillustraties: © mema - Fotolia.com
Illustratieverantwoording: FoFotolia.com: AlexeyE30, andre@cf, bibi, blvdone, KMC, lunamarina, Lyanne, sharpnose, Paulo M.F. Pires- Fotolia.com, Alexandr Vasilyev, alswart, Antonio, Gravante, by_adr, Csaba Balasi, designsoliman, edKfotofac, Gjermund Alsos, KMC, Milos Stojiljkovic, Paul Johnson, pterwort, Samuel Borges, stuporter, Tyler Olson, Valeriy Lebedev beS TAl- FOD Economie, Christof Willocx, Corbis, Erik O, flickr / Luc Van Braekel, flickr / pfctdayelise, lmageselect, iStockphoto, stock.xchng, Katrijn Van Eeckert, Reporters, Shutterstock, Wikimedia, Wikipedia/Frame Reklameburo

Auteurs DELTA-T en NIEUWE DELTA-T
Gerda Barberien, Jos Casteels, Peter Crokaerts, Danielle De Vos, Luc Goris, Geert Heynickx, André Huysmans, Els Jacobs, Roland Rottiers, Jos Salaets, Frederik Smessaert, Conny Van den Brande, Luc Van den Broeck, Annick Van den put, Katrijn Van Eekert, Carl Van Hove

Redactie: Jos Casteels, Frederik Smessaert

NUR 128

ISBN 978-90-301-4288-1 21526/3 D2016/0032/0585

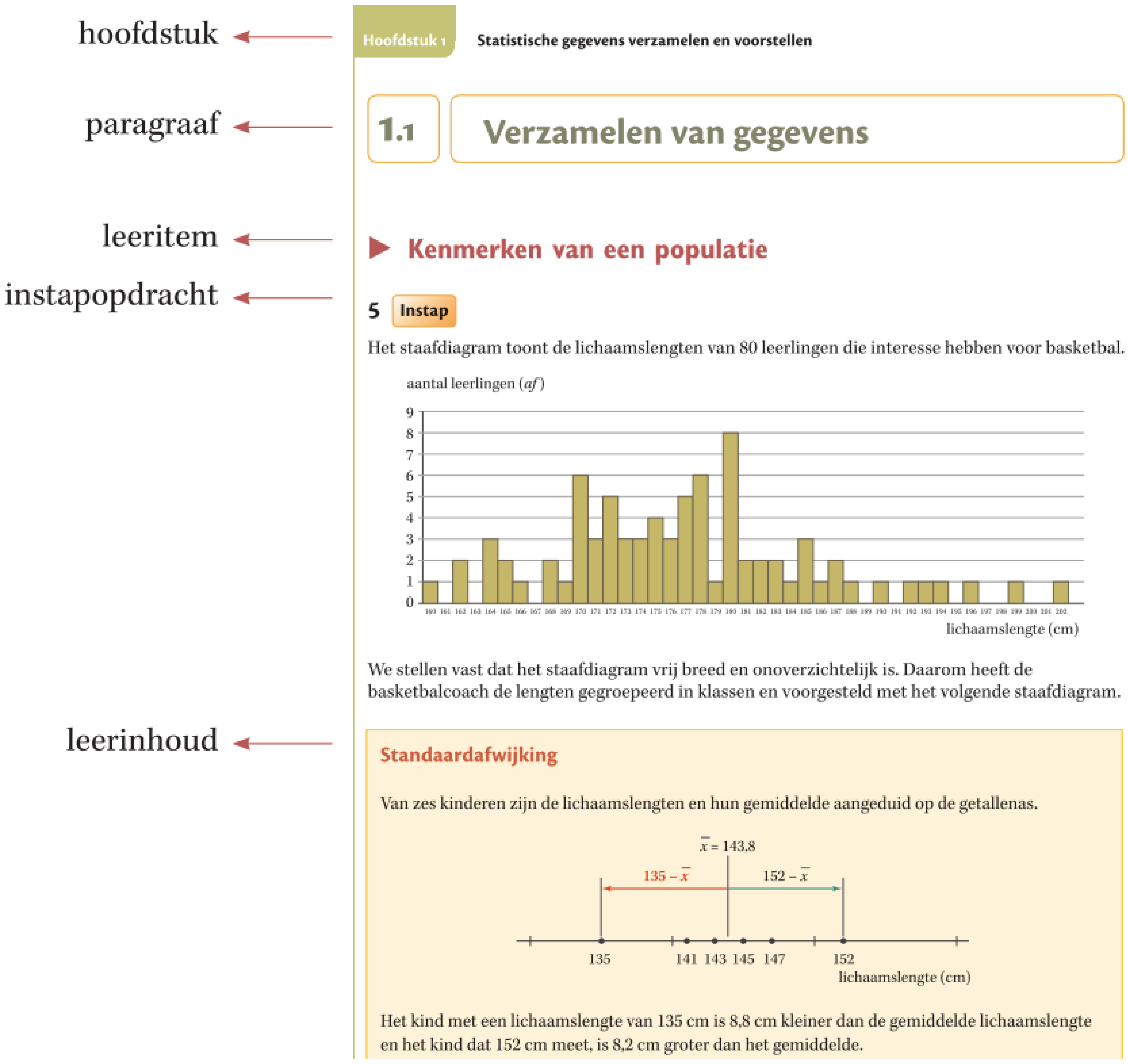
Plantyn
Motstraat 32, 2800 Mechelen
T 015 36 36 36
F 015 36 36 37
klantendienst@plantyn.com
www.plantyn.com

Dit boek werd gedrukt op papier van verantwoorde herkomst.

De leermap **NIEUWE DELTA-T Exponentiële en logaritmische functies – basisdeel** is in hoofdzaak bestemd voor leerlingen uit de derde graad van de TSO-studierichtingen en de KSO-studierichtingen die leerplan b of c volgen.

Opbouw van de leermappen Nieuwe Delta-T

Elk hoofdstuk wordt ingeleid met een passende opening over het te bestuderen onderwerp. De genummerde paragrafen van elk hoofdstuk bestaan uit een aantal leeritems. Elk leeritem wordt ingeleid met een instapopdracht.



Elk hoofdstuk begint met een inhoudstafel die aanwijst op welke pagina elk leeritem staat. In elk leeritem wordt de theorie compact uitgelegd en toegepast op concrete voorbeelden. De soort leerinhoud is herkenbaar aan de **achtergrondkleur**.

Kennis en rekenregels om de opdrachten te kunnen uitvoeren.

Doelgericht gebruik van de rekenmachines TEXAS INSTRUMENTS en CASIO.

Vaardigheden om vlot te kunnen meten, schetsen en tekenen.

Extra leerinhouden om uitbreidingsdoelstellingen te realiseren.

Didactisch gerangschikte opdrachten zorgen voor een systematische verwerking van de leerinhouden.

Instap Leeritems worden ingeleid met probleemstellingen uit de praktijk.

De moeilijkheidsgraad van de opdrachten is aangegeven met gekleurde vierkantjes.

Eenvoudige opdrachten

Opdrachten met een bijkomende moeilijkheidsgraad

Opdrachten met een hogere moeilijkheidsgraad

Oefenopdrachten op de uitbreidingsleerstof worden aangegeven met een schaduwvlakje.

Instap

Elke paragraaf wordt afgesloten met **Uitdagingen**.

De **Uitdagingen** laten voldoende ruimte voor begeleid zelfstandig leren of zelfstandig leren en helpen de verschillen in studietempo opvangen.

Uitdagingen

1 In een klas scoorden de meisjes gemiddeld 8,5 en de jongens 7,4 op een toets wiskunde.
Het gemiddelde van de klas is 8. Er zitten 12 meisjes in die klas.
Hoeveel leerlingen telt deze klas?

(A) 16 B (B) 18 (C) 20 (D) 22 (E) 24

Vlaamse Wiskunde Olympiade

In de **Exploraties** komen onderwerpen aan bod die binnen of buiten de wiskunde liggen.

Exploratie

Kerncijfers

De Algemene Directie Statistiek en Economische Informatie van de FOD Economie heeft de opdracht om aan de informatiebehoeften van de overheid, de bedrijfswereld en de burgers te voldoen door hen actuele cijfers over de toestand van het land aan te bieden.

De brochure 'Kerncijfers' geeft een overzicht van wat er aan basisgegevens beschikbaar is.

Het **trefwoordenregister** geeft aan op welke pagina we de nodige informatie kunnen terugvinden.

Trefwoordenregister

A

Absolute frequentie **35**
Absolute frequentiedichtheid **61**
Aselecte steekproef **20**

1 Machtswortels en logaritmen

Geluidshinder heeft een grote invloed op de gedragingen van mens en dier. Mensen die in de buurt van een snelweg of een vliegveld wonen, voeren vaak protestacties tegen verkeerslawaai. Er zijn twee mogelijkheden: de geluidsbron aanpakken of jezelf beschermen. Dat laatste kan op verschillende manieren.

- Het meest eenvoudige beschermmiddel zijn oordopjes.
- Je kunt in je woning geluidsisolatie en dubbel glas plaatsen.
- De aanleg van grondwallen of geluidsschermen langs het traject van een hogesnelheidstrein of een autosnelweg vermindert het lawaai.

Geluidsintensiteit vermeerdert telkens met een eenheid wanneer de energietoename tienmaal zo groot wordt. Om dit verband uit te drukken, werken we met logaritmen.

1.1 Machtswortels

1.2 Logaritmen

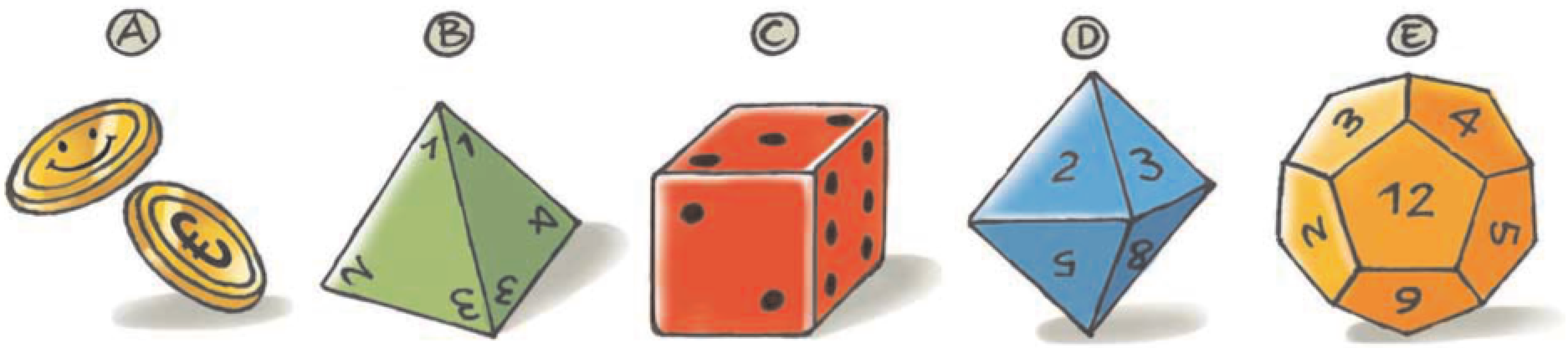


1.1 Machtswortels

▶ Machtsfuncties en *n*-de machtswortels

1 Instap

Bij gezelschapsspellen wordt het lot dikwijls bepaald door muntstukken, tollen en dobbelstenen in allerlei vormen.



A (muntstuk met kruis of munt), B (regelmatig viervlak met cijfers van 1 tot 4 op de hoekpunten), C (kubus met ogen van 1 tot 6), D (regelmatig achtvlak met cijfers van 1 tot 8) en E (regelmatig twaalfvlak met cijfers van 1 tot 12).

1 De kans om kruis te gooien met een muntstuk is gelijk aan $\frac{1}{2}$.

Wat is de kans op een hoogste worp bij de andere dobbelvormen?

dobbelvorm	A	B	C	D	E
kans op hoogste worp	$\frac{1}{2}$	....	....	....	....

2 Bij drie worpen met een muntstuk is de kans om driemaal kruis te gooien, gelijk aan
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Wat is de kans op een maximale score in de volgende gevallen?

dobbelvorm	A	B	C	D	E
aantal worpen	3	6	5	4	3
kans op maximale score	$\frac{1}{8}$	....	....	....	....

3 Als de kans op een maximale score van drie worpen gelijk is aan $\frac{1}{1728}$, dan kunnen we besluiten dat er met dobbelvorm E gespeeld werd omdat $\left(\frac{1}{12}\right)^3 = \frac{1}{1728}$.

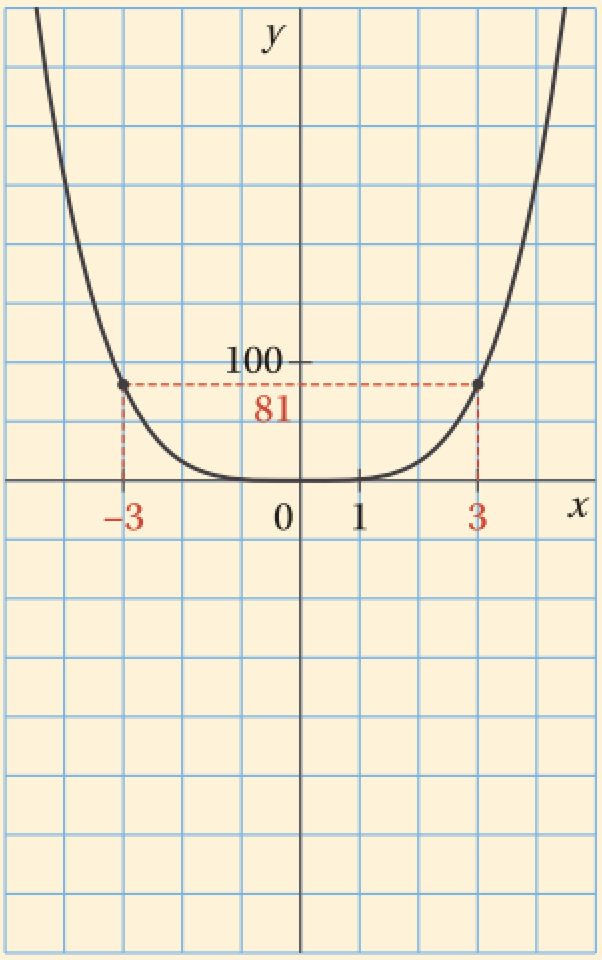
Met welke dobbelvormen spelen we in de volgende gevallen?

kans op maximale score	$\frac{1}{1728}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{1024}$
aantal worpen	3	2	3	4	5
dobbelvorm	E	....	....	....	....

Machtsfuncties en *n*-de machtswortels

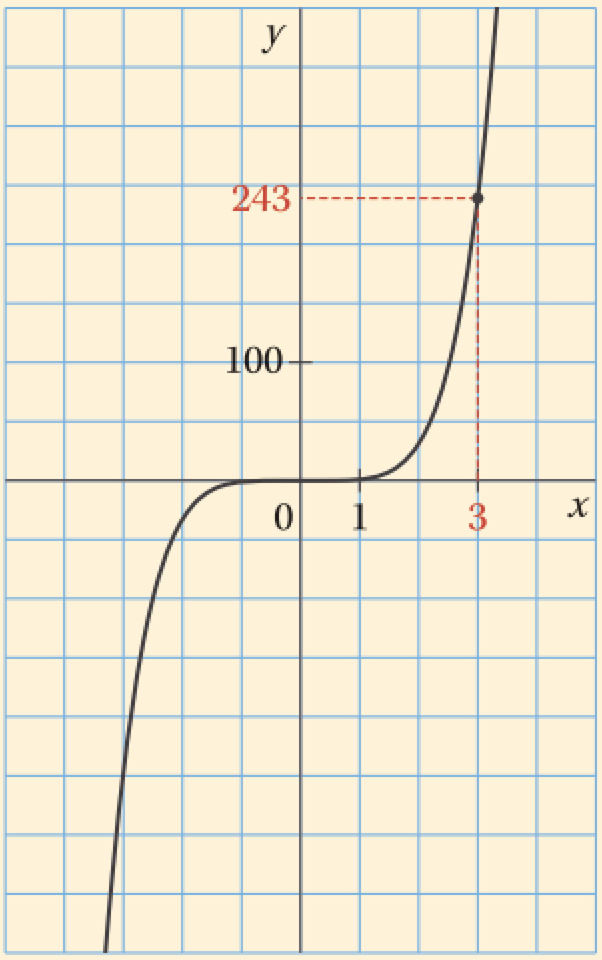
De machtsfuncties $f(x) = x^4$ en $g(x) = x^5$ geven een verband weer tussen een getal en respectievelijk de vierdemacht en de vijfdemacht van dat getal.

$f(x) = x^4$



x	$f(x)$
...	...
−5	625
−4	256
−3	81
−2	16
−1	1
0	0
1	1
2	16
3	81
4	256
5	625
...	...

$g(x) = x^5$



x	$g(x)$
...	...
−5	−3125
−4	−1024
−3	−243
−2	−32
−1	−1
0	0
1	1
2	32
3	243
4	1024
5	3125
...	...

Op de grafieken en in de tabellen kunnen we de vierdemacht en de vijfdemacht van het getal 3 aflezen.

We schrijven: $3^4 = 81$ $\quad$ $3^5 = 243$

Omgekeerd kunnen we ook aflezen van welke getallen de vierdemacht gelijk is aan 81 en de vijfdemacht gelijk is aan 243.

We schrijven: $81 = 3^4$ en $81 = (-3)^4$ $\quad$ $243 = 3^5$

De tegengestelde getallen 3 en −3 noemen we respectievelijk de **positieve vierdemachtswortel** van 81 en de **negatieve vierdemachtswortel** van 81.

We schrijven: $\sqrt[4]{81} = 3$ en $-\sqrt[4]{81} = -3$

Het getal 3 is ook de **vijfdemachtswortel** van 243.

We schrijven: $\sqrt[5]{243} = 3$

Het getal onder het wortelteken noemen we het **grondtal**.

Het getal boven het wortelteken noemen we de **wortelexponent**. De wortelexponent is een natuurlijk getal groter dan 1. Bij vierkantswortels wordt de wortelexponent 2 niet geschreven.

n-de machtswortels

x is een n-de machtswortel van a $\Leftrightarrow$ $x^n = a$ $\quad a \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}_0$

Uit de grafieken met voorschrift $f(x) = x^n$ kunnen we afleiden hoeveel n-de machtswortels een reëel getal a heeft.

- Elk reëel getal a heeft juist één n-de machtswortel als n oneven is.
- Elk positief reëel getal a heeft twee n-de machtswortels als n even is: een positieve n-de machtswortel en een negatieve n-de machtswortel.
- Een negatief reëel getal a heeft geen n-de machtswortels als n even is.

Voorbeelden

16 heeft twee tegengestelde vierdemachtswortels.

$\sqrt[4]{16} = 2$ en $-\sqrt[4]{16} = -2$ omdat $2^4 = (-2)^4 = 16$

32 heeft één positieve vijfdemachtswortel.

$\sqrt[5]{32} = 2$ omdat $2^5 = 32$

–32 heeft één negatieve vijfdemachtswortel.

$\sqrt[5]{-32} = -2$ omdat $(-2)^5 = -32$

–64 heeft geen reële zesdemachtswortel omdat een zesdemacht altijd positief is.

2

Bepaal zonder ICT.

1 $\sqrt[4]{81} =$ ....

2 $\sqrt[3]{64} =$ ....

3 $\sqrt[11]{-1} =$ ....

4 $\sqrt[4]{625} =$ ....

5 $\sqrt[5]{-32} =$ ....

6 $\sqrt[4]{10\,000} =$ ....

7 $\sqrt[5]{-243} =$ ....

8 $\sqrt[6]{64} =$ ....

9 $\sqrt[3]{-216} =$ ....

10 $\sqrt[7]{-128} =$ ....

11 $\sqrt[3]{343} =$ ....

12 $\sqrt[5]{3125} =$ ....

3

Gegeven is een kubus met ribbe z en volume V.

1 Stel een formule op om de ribbe te berekenen als het volume gegeven is.

....

2 Bereken de ribbe als het volume gelijk is aan 27 dm^3.

....

4

De rij oneven natuurlijke getallen kunnen we met twee bewerkingen omzetten naar de rij natuurlijke getallen zonder nul.

1 Maak de som van de onderlijnde getallen.

1	,	3 , 5	,	7 , 9 , 11	,	13 , 15 , 17 , 19	,	21 , 23 , 25 , 27 , 29	,	...
1		....		....		....		....		

2 Welke bewerking moeten we op deze sommen uitvoeren om de rij van de natuurlijke getallen zonder nul te verkrijgen? Controleer.

....

....

5

Bepaal het aantal n-de machtswortels van het getal a.

voorwaarde	n is even	n is oneven
$a > 0$	....	....
$a = 0$	....	....
$a < 0$	....	....

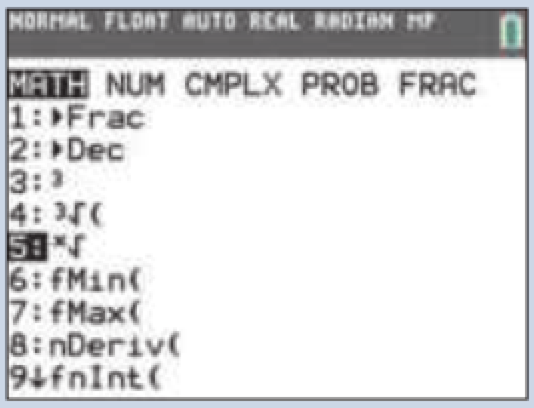
n-de machtswortels berekenen

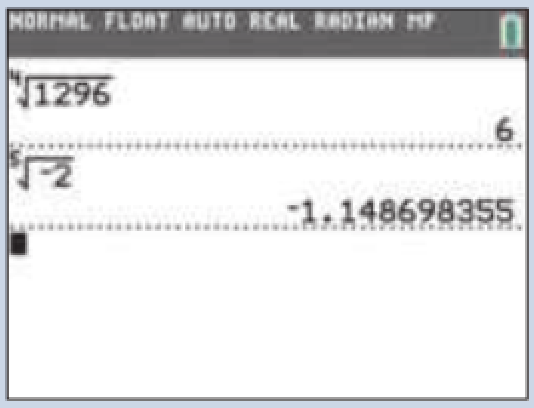
We berekenen $\sqrt[4]{1296}$ en $\sqrt[5]{-2}$.

TEXAS INSTRUMENTS

We gebruiken optie 5 van het menu MATH.

- 4 [MATH] [5: $\sqrt[x]{}$] 1296 [ENTER]
- 5 [MATH] [5: $\sqrt[x]{}$] –2 [ENTER]

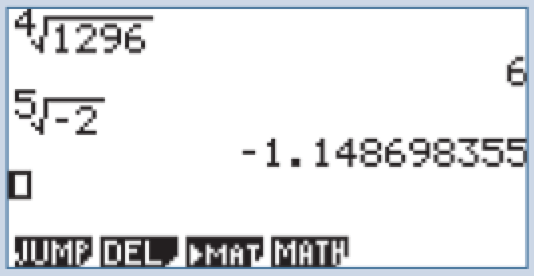




CASIO

We gebruiken de tweede functie van de machttoets $\sqrt[x]{}$.

- [MENU] [1: RUN·MAT] 4 [SHIFT] [$\sqrt[x]{}$] 1296 [EXE]
- 5 [SHIFT] [$\sqrt[x]{}$] –2 [EXE]



6

Bereken indien mogelijk de *n*-de machtswortel. Rond af op 2 decimalen.

a	$\sqrt[3]{a}$ =	$\sqrt[4]{a}$ =	$\sqrt[5]{a}$ =	$\sqrt[6]{a}$ =
2				
–7				
$\frac{1}{3}$				
–0,5				

7

De snaren van een harp hebben een verschillende lengte en brengen dus een verschillende toon voort. De langste snaren klinken het diepst. Als de kortste snaar een lengte van L cm heeft, kunnen we de lengte berekenen van elke snaar die n halve tonen lager klinkt met de omrekening $L \cdot \sqrt[12]{2^n}$.



Bereken de lengte van de snaren die een kleine terts ($n = 3$), een grote terts ($n = 4$), een kwart ($n = 5$), een kwint ($n = 7$) en een octaaf ($n = 12$) lager gestemd zijn dan de bovensnaar.

Vul de tabel in. Rond af op 1 decimaal.

L \ n	3	4	5	7	12
15	....	....	....	....	....
20	....	....	....	....	....

8

Volgens de Indische wiskundige Ramanujan kunnen we het irrationaal getal π berekenen met de vierdemachtswortel $\sqrt[4]{\dfrac{2143}{22}}$. Hoe nauwkeurig is deze benadering?

....

....

n-de graadsvergelijkingen $ax^n = b$ oplossen met n-de machtswortels

Een vergelijking van de vorm $ax^n = b$ kunnen we oplossen met n-de machtswortels.

Voorbeelden

$4x^3 = -32$

$x^3 = -8$

$x = \sqrt[3]{-8}$ — **derdemachtswortel van een getal**

$x = -2$

$3x^4 = 48$

$x^4 = 16$

$x = \sqrt[4]{16}$ of $x = -\sqrt[4]{16}$ — **vierdemachtswortels van een positief getal**

$x = 2$ $\qquad$ $x = -2$

$x^6 = -1$

geen oplossingen — **zesdemachtswortels van een negatief getal bestaan niet**

Met deze methode kunnen we ook vergelijkingen van de vorm $a(x+b)^n = c$ oplossen.

$5(x-3)^4 = 80$

$(x-3)^4 = 16$

$x - 3 = \sqrt[4]{16}$ of $x - 3 = -\sqrt[4]{16}$ — **vierdemachtswortels van een positief getal**

$x - 3 = 2$ $\qquad$ $x - 3 = -2$ — **vergelijkingen afzonderlijk oplossen**

$x = 5$ $\qquad$ $x = 1$

9

Bepaal het aantal oplossingen van de vergelijking $x^n = p$.

voorwaarde	n is even	n is oneven
$p > 0$	....	....
$p = 0$	....	....
$p < 0$	....	....

10

Los zonder ICT de derdegraadsvergelijking op.

1 $2x^3 = 54$

2 $5x^3 = -625$

3 $2x^3 = \frac{1}{4}$

4 $-\frac{1}{2}x^3 = 32$

5 $-0{,}04x^3 = 0{,}32$

6 $-0{,}01x^3 = -10$

7 $\frac{4}{5}x^3 = \frac{25}{2}$

8 $0{,}2x^3 = 12{,}8$

11

Los op. Rond af op 2 decimalen.

1 $5x^4 - 1 = 0$

2 $2x^6 - 3 = 0$

3 $0{,}4x^4 - 7{,}28 = 0$

4 $\frac{1}{4}x^5 + \frac{2}{3} = 0$

5 $5x^3 + 2 = 0$

6 $2x^4 + 5 = 0$

12

Los op. Rond af op 2 decimalen.

1 $(x-2)^3=8$

2 $(-x+1)^4=1$

3 $(x+7)^5=8$

4 $2(2x-5)^4=162$

5 $5(4x+3)^5=-160$

6 $3(4x+5)^6=7$

13

Een fabrikant van kogellagers berekent de massa van de kogels met de formule $m = 10d^3$. Hierin stelt m de massa in gram voor en d de diameter in centimeter.



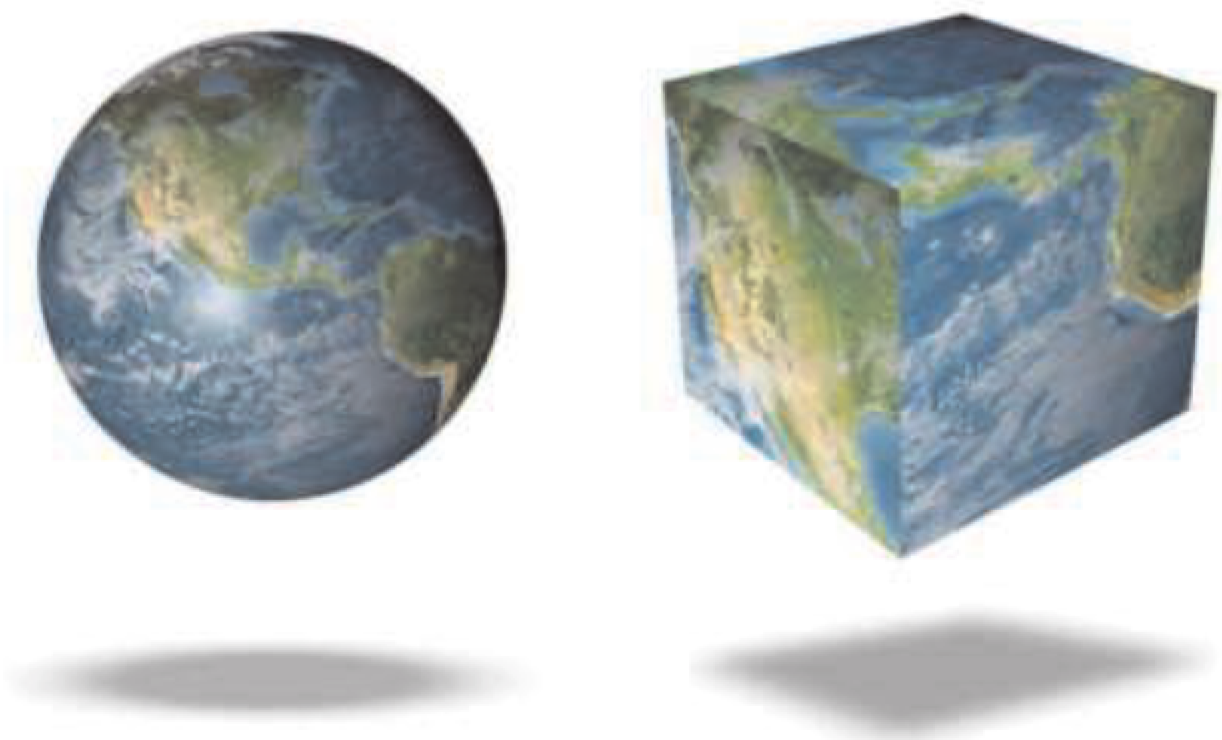
1 Bepaal de massa van een kogel met een diameter van 1,2 cm.

2 Bepaal de diameter van een kogel met een massa van 5 g.

3 Bepaal de verhouding van de diameters van twee kogels waarvan de massa van de ene kogel tweemaal zo groot is als de massa van de andere kogel.

14

Een kubusvormige doos heeft een inhoud van 800 cm^3. Wat is de straal van de grootste bal die in de doos past?



Machten met rationale exponenten

15 Instap

1 Bereken met de rekenregels voor machten met gehele exponenten.

$a^7 \cdot a^3 =$ .... $\frac{a^7}{a^3} =$ .... $(a^7)^3 =$ ....

$(ab)^7 =$ .... $\left(\frac{a}{b}\right)^3 =$ ....

2 Bereken.

$\left(\sqrt{25}\right)^2 =$ .... $\left(\sqrt[3]{27}\right)^3 =$ .... $\left(\sqrt[4]{16}\right)^4 =$ ....

$\left(\sqrt[7]{a}\right)^7 =$ .... $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n =$ ....

Machten met rationale exponenten

De eigenschappen van machten met gehele exponenten gelden ook voor machten met rationale exponenten.

- Product en quotiënt van gelijksoortige machten

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \qquad a > 0$$

- Macht van een macht

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q} \qquad a > 0$$

- Macht van een product en een quotiënt

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \qquad a > 0 \text{ en } b > 0$$

Machten met exponent $\frac{1}{n}$

De macht $8^{\frac{1}{3}}$ geven we een betekenis door de rekenregel ‘macht van een macht’ toe te passen.

$$\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 8^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 8^1 = 8 \quad \text{en} \quad \left(\sqrt[3]{8}\right)^3 = 2^3 = 8$$

Dit betekent dat $8^{\frac{1}{3}}$ een andere notatie is voor $\sqrt[3]{8}$.

Algemeen schrijven we:

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\quad a > 0$

Machten met rationale exponenten

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $\quad a > 0 \quad a^{\frac{m}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Merk op

Machten met een rationale exponent zijn een andere notatie voor wortelvormen.

Voorbeelden

$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

$9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

$8^{0,2} = 8^{\frac{2}{10}} = 8^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{8}$

Bij machten met rationale exponenten groter dan 1, passen we eerst de eigenschappen van machten toe en voeren dan de omzetting uit.

$5^{\frac{3}{2}} = 5^{1+\frac{1}{2}} = 5^1 \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{5}$ **product van gelijksoortige machten**

16

Schrijf de macht als een wortelvorm.

1 $7^{\frac{1}{2}} =$ ....

2 $3^{\frac{1}{5}} =$ ....

3 $2^{\frac{1}{4}} =$ ....

4 $6^{\frac{1}{3}} =$ ....

5 $5^{\frac{2}{3}} =$ ....

6 $4^{\frac{2}{9}} =$ ....

7 $7^{0,1} =$ ....

8 $2^{0,3} =$ ....

9 $6^{0,2} =$ ....

10 $11^{0,5} =$ ....

11 $3^{0,6} =$ ....

12 $4^{0,4} =$ ....

17

Schrijf de wortelvorm als een macht met rationale exponent.

1 $\sqrt{6} =$ ....

2 $\sqrt[4]{10} =$ ....

3 $\sqrt[3]{5} =$ ....

4 $\sqrt[3]{0,1} =$ ....

5 $\sqrt[4]{1,5} =$ ....

6 $\sqrt[7]{0,3} =$ ....

18

Pas de eigenschappen van machten toe om de macht te schrijven als een vereenvoudigde wortelvorm.

1 $3^{\frac{3}{2}} =$ ....

2 $5^{\frac{7}{3}} =$ ....

3 $2^{2,5} =$ ....

4 $3^{3,4} =$ ....

19

Pas de eigenschappen van machten toe en schrijf de verkregen macht als een wortelvorm.

1 $5^{\frac{2}{5}} \cdot 5^{\frac{1}{5}} =$ ....

2 $7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{1}{4}} =$ ....

3 $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} =$ ....

4 $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{2}{5}} =$ ....

5 $11^{\frac{2}{5}} : 11^{\frac{1}{5}} =$ ....

6 $5^{\frac{1}{2}} : 5^{\frac{1}{3}} =$ ....

7 $6 : 6^{\frac{1}{3}} =$ ....

8 $10^{\frac{4}{5}} : 10^{\frac{1}{2}} =$ ....

9 $(7^3)^{\frac{1}{6}} =$ ....

10 $\left(6^{\frac{1}{6}}\right)^4 =$ ....

11 $\left(5^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} =$ ....

12 $\left(2^{-\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{5}{4}} =$ ....

20

Oliver en Sara controleren elkaars huiswerk en stellen vast dat de uitkomsten verschillen.

Oliver: $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[8]{2^2}$

Sara: $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[4]{2^2}$

Wie heeft de juiste uitkomst? Verklaar.

....

....

21

De macht $27^{\frac{1}{3}}$ kunnen we op twee manieren berekenen:

$$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3 \qquad \text{of} \qquad 27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 3^1 = 3$$

Bereken zonder ICT.

1 $100^{\frac{1}{2}} =$ ....

$100^{\frac{1}{2}} =$ ....

2 $81^{0,25} =$ ....

$81^{0,25} =$ ....

3 $16^{-\frac{1}{4}} =$ ....

$16^{-\frac{1}{4}} =$ ....

4 $125^{-\frac{1}{3}} =$ ....

$125^{-\frac{1}{3}} =$ ....

5 $36^{-0,5} =$ ....

$36^{-0,5} =$ ....

6 $27^{-0,33...} =$ ....

$27^{-0,33...} =$ ....

22

Volgens biologen kunnen we de polsslag van een volwassen persoon berekenen als we zijn lichaamslengte kennen.

$p = \frac{94}{h^{\frac{1}{2}}}$

p : aantal polsslagen per minuut
h : lichaamslengte in meter

1 Bereken de polsslag van een man die 1,75 m groot is.

....

2 Bereken de lichaamslengte van een man met een polsslag van 67 slagen per minuut.

....

....

....

....

3 Meet je eigen polsslag en controleer of dit aantal overeenkomt met het rekenresultaat.

....

23

De kijkafstand is niet alleen afhankelijk van de weersgesteldheid maar ook van de kijkhoogte. De formule stelt ons in staat om bij helder weer de kijkafstand te berekenen in functie van de kijkhoogte.

$s = 3500 \cdot h^{\frac{1}{2}}$

s : kijkafstand in meter
h : kijkhoogte in meter



1 Aan de Franse kust kunnen we bij goed weer de krijtrotsen van Dover waarnemen bij een kijkhoogte van 80 meter. Wat is de kijkafstand tussen de Franse kustplaats en Engeland?

....

....

2 Lore bevindt zich op het uitkijkplatform van een vuurtoren, 117 meter boven de begane grond. Julie staat aan de voet van de vuurtoren. Hoeveel kilometer kan Lore verder kijken dan Julie als we ook rekening houden met de respectievelijke ooghoogten van 1,6 meter en 1,7 meter?

....

....

....

....

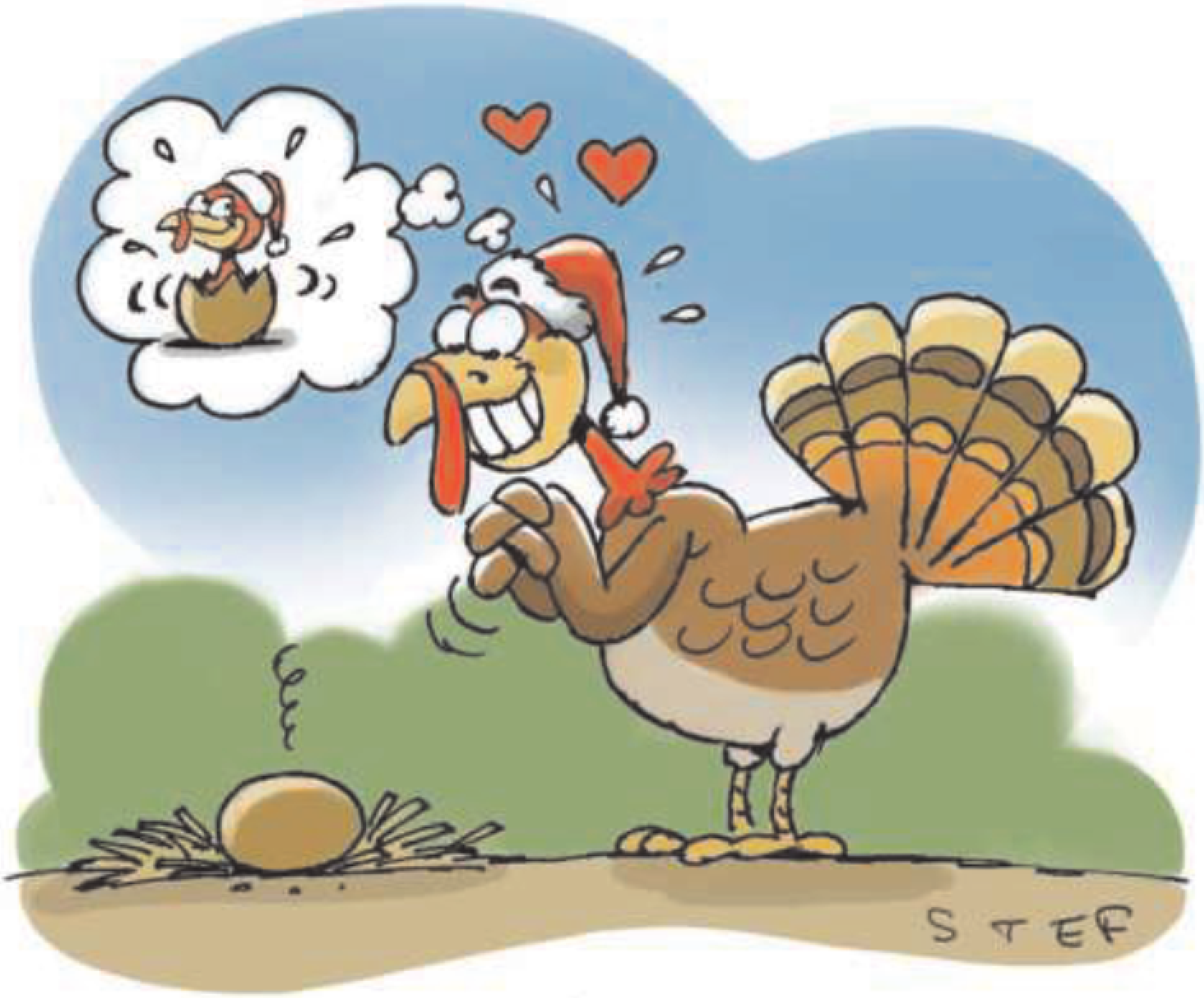
24

De ornitholoog Rahn onderzocht 800 vogelsoorten en vond de volgende verbanden:

$e = 0{,}3 \cdot m^{\frac{3}{4}}$ — e : massa van een ei in gram; m : massa van de vogel in gram

$t = 7{,}25 \cdot m^{\frac{1}{6}}$ — t : broedtijd in dagen

Behalve voor de struisvogelachtige, die opvallend lichte eieren legt in verhouding tot haar lichaamsgewicht, geven deze formules vrij behoorlijke resultaten.



Noëlla, onze kerstkalkoen, weegt 4096 gram. Op pinkstermaandag legde ze een ei.

1 Bereken de massa van het kalkoenei.

....

....

2 Hoelang zal Noëlla op het ei moeten broeden vooraleer ze het kleine kalkoentje kan verwelkomen?

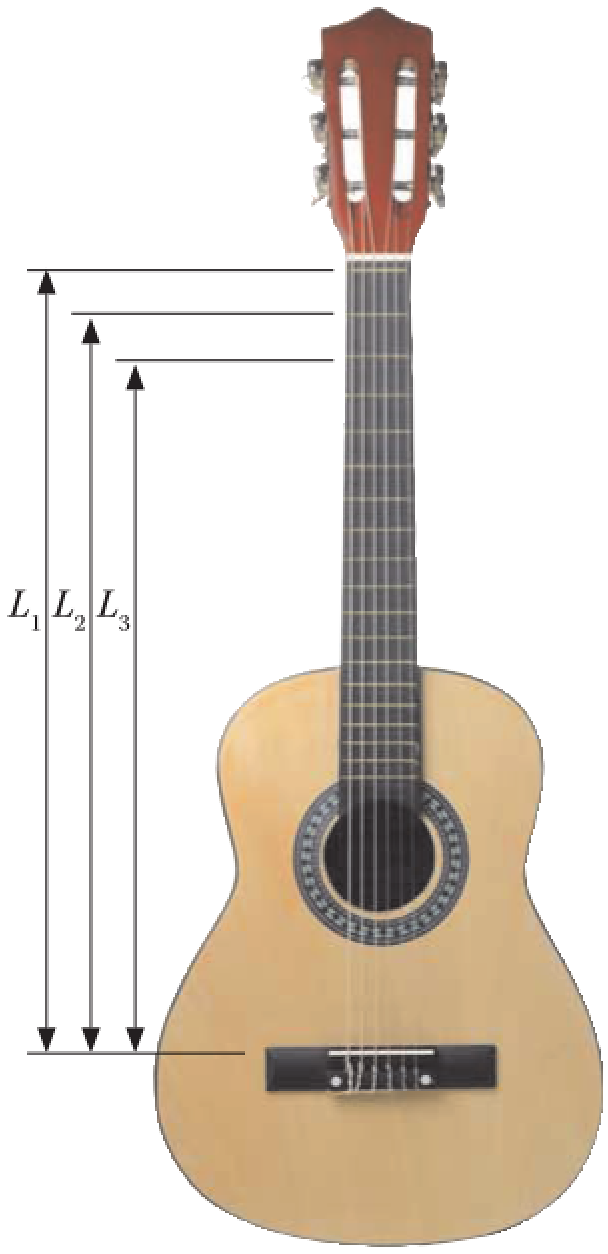
....

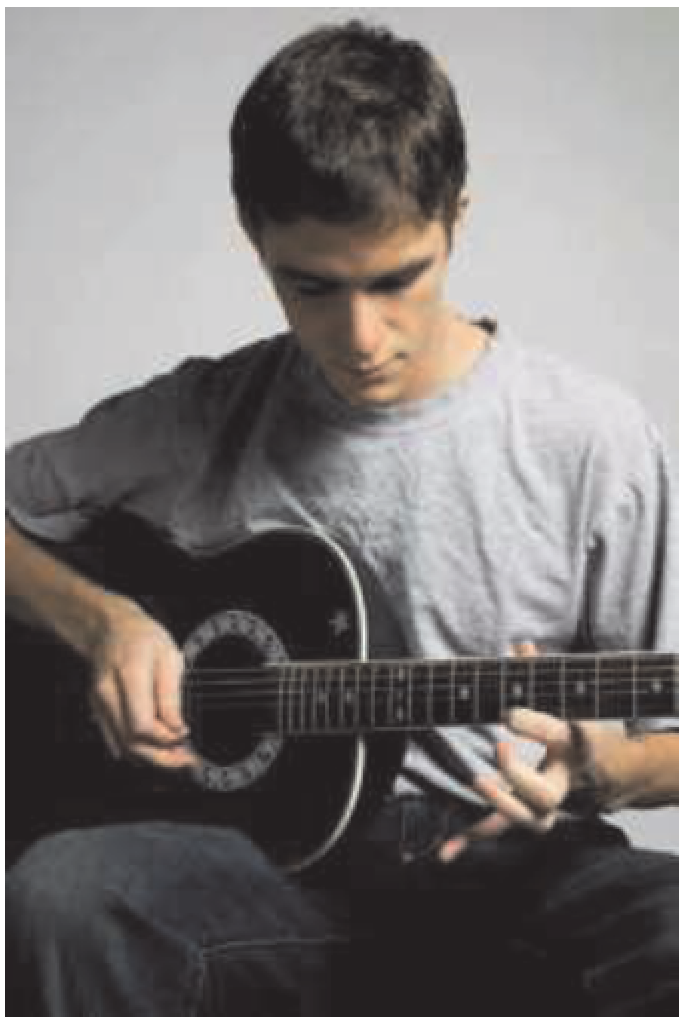
....

25

Op de hals van sommige snaarinstrumenten, zoals de gitaar, zijn intervallen aangeduid met frets. Op die manier kan de speler de trillende snaren met één hand inkorten en verlengen. Wanneer de snaren met één interval ingekort worden, dan klinken ze een halve toon hoger.

De zuiverste toonladders krijgen we door de tussenruimten regelmatig te verkorten naar de klankkast toe.





Snaarinstrumenten worden 'gelijkzwevend' gestemd, d.w.z. dat er een constante verhouding bestaat tussen de snaarlengte L_1 van een toon en de snaarlengte L_2 van een halve toon hoger:

$\frac{L_1}{L_2} = \sqrt[12]{2}$.

1 De verhouding tussen de snaarlengte L_1 van een toon en de snaarlengte L_4 van een kleine terts (3 halve tonen) hoger, berekenen we door $\frac{L_1}{L_4}$ te schrijven als $\frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{L_2}{L_3} \cdot \frac{L_3}{L_4}$. Aan welke wortelvorm is de verhouding $\frac{L_1}{L_4}$ gelijk?

$\frac{L_1}{L_4} =$ ....

2 Wat is de verhouding tussen de snaarlengte L_1 van een toon en de snaarlengte L_5 van een grote terts (4 halve tonen) hoger?

$\frac{L_1}{L_5} =$ ....

3 Wat is de verhouding tussen de snaarlengte L_1 van een toon en de snaarlengte L_8 van een kwint (7 halve tonen) hoger?

....

4 Met hoeveel moet de lengte van een snaar ingekort worden om een octaaf (12 halve tonen) hoger te klinken?

....

....

5 De verhouding van de snaarlengte L_1 tot de snaarlengte L_n is gelijk aan $2^{\frac{1}{6}}$. Hoeveel tonen klinkt de snaar met lengte L_n hoger?

....

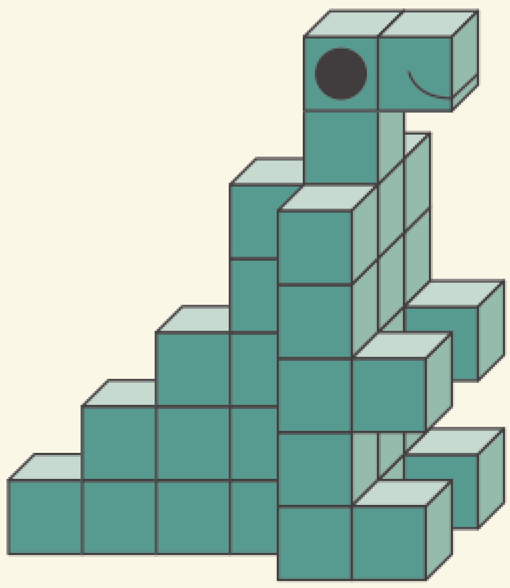
....

Uitdagingen

1 Een blad papier heeft een formaat A_0 als de oppervlakte 1 m^2 bedraagt en de lengte gelijk is aan $\sqrt{2}$-maal de breedte. Als we een formaat A_0 middendoor knippen evenwijdig met de breedte, dan verkrijgen we twee bladhelften met een formaat A_1. Op dezelfde wijze halveren we een formaat A_1 en verkrijgen we een formaat A_2. Om een formaat A_4 te verkrijgen, moeten we nog tweemaal halveren.

1. Maak een schets van het papierformaat A_0 met lengte 10 cm. Bereken eerst de breedte van de rechthoek.
2. Duid op de schets de grootte van een formaat A_4 aan en bereken de juiste afmetingen.
3. Controleer het antwoord door de lengte en de breedte van dit boek te meten.

2 De blokkenconstructie bestaat uit kubussen en lijkt op een dinosaurus.



1. Stel een formule op voor de inhoud V en de oppervlakte A van deze dinosaurus in functie van de ribbe z van de kubussen.
2. Stel een formule op voor de oppervlakte A van de dinosaurus in functie van zijn inhoud V.
3. Bereken de oppervlakte van de dinosaurus als de inhoud van de dinosaurus 1,5 dm^3 is.

3 Als we de ribbe van een kubus verdubbelen, dan wordt het volume 875 m^3 groter. Bereken de oorspronkelijke ribbe.

4 De zevende machtswortel uit $7^{(7^7)}$ is:

(A) 7^7 (B) $7^{(7^7-1)}$ (C) $7^{(6^7)}$ (D) $7^{(7^6)}$ (E) $(\sqrt{7})^7$

Vlaamse Wiskunde Olympiade

5 Bereken x.

1 $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{x}}} = 10^2$

2 $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{x}}} = 0{,}1$

6 Schrijf de wortelvormen met een rationale exponent.

$\sqrt{2}$ $\sqrt{\sqrt{2}}$ $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$ $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}$ $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}$ ...

Bereken op 1 miljardste nauwkeurig de wortelvorm die op de 23e plaats in de bovenstaande rij staat.

7 Als $x \geqslant 0$ dan is $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} =$

(A) $x\sqrt{x}$ (B) $x^4\sqrt{x}$ (C) $\sqrt[8]{x}$ (D) $\sqrt[8]{x^3}$ (E) $\sqrt[8]{x^7}$

Vlaamse Wiskunde Olympiade

8 Bereken zonder ICT: $\dfrac{100^{\frac{3}{2}} \cdot 32^{-\frac{3}{5}} \cdot 1^{\frac{5}{7}} \cdot 125^{-\frac{1}{3}} \cdot 81^{\frac{3}{4}}}{625^{\frac{1}{4}} \cdot 125^{\frac{2}{3}} \cdot 36^{\frac{3}{2}} \cdot 128^{-\frac{2}{7}} \cdot 25^{-\frac{1}{2}}}$

9 Ontdek de fout. Welke overgang klopt niet en waarom?

$2 = 64^{\frac{1}{6}} = \left[(-8)^2\right]^{\frac{1}{6}} = (-8)^{2\cdot\frac{1}{6}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$

10 De Duitser Karl Meeh onderzocht het verband tussen het lichaamsgewicht en de huidoppervlakte van verschillende diersoorten. Hij stelde de volgende formule op:

$A = c \cdot m^{\frac{2}{3}}$

A : huidoppervlakte in dm^2
m : massa in kg
c : Meeh-coëfficiënt

De Meeh-coëfficiënt is een constante die per diersoort verschilt.

1 Van enkele Schotse Hooglanders werd het gewicht en de huidoppervlakte opgetekend.



massa m (kg)	430	450	490	500
huidoppervlakte A (dm^2)	507	523	553	560

Bereken de Meeh-coëfficiënt van deze diersoort. Rond af op 1 decimaal.

2 Bereken de huidoppervlakte van een kalf van een Schotse Hooglander met een massa van 80 kg.

3 Bereken de massa van een Schotse Hooglander met een huidoppervlakte van 500 dm^2.

4 De Meeh-coëfficiënt van de mens is 11,2. Bereken je eigen huidoppervlakte in m^2.

Exploratie

Allometrische functies

In de biomedische wetenschappen maakt men vaak gebruik van allometrische grootheden. Hiermee bedoelt men variabelen y die op een soms 'vreemde' manier afhangen van bijvoorbeeld het lichaamsgewicht x van een levend wezen:

$$y = a \cdot x^b \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

In 1932 werden de allometrische functies voor het eerst gebruikt door de Engelse bioloog Julian Huxley (1887-1975) in een studie 'Problems of Relative Growth'.

In 1986 ontdekte de Amerikaanse bioloog Douglas Futuyma een allometrisch verband tussen het lichaamsgewicht en de theoretische hersenmassa van levende wezens. Dit verband werd vertaald in twee formules.

- Formule voor warmbloedige diersoorten:

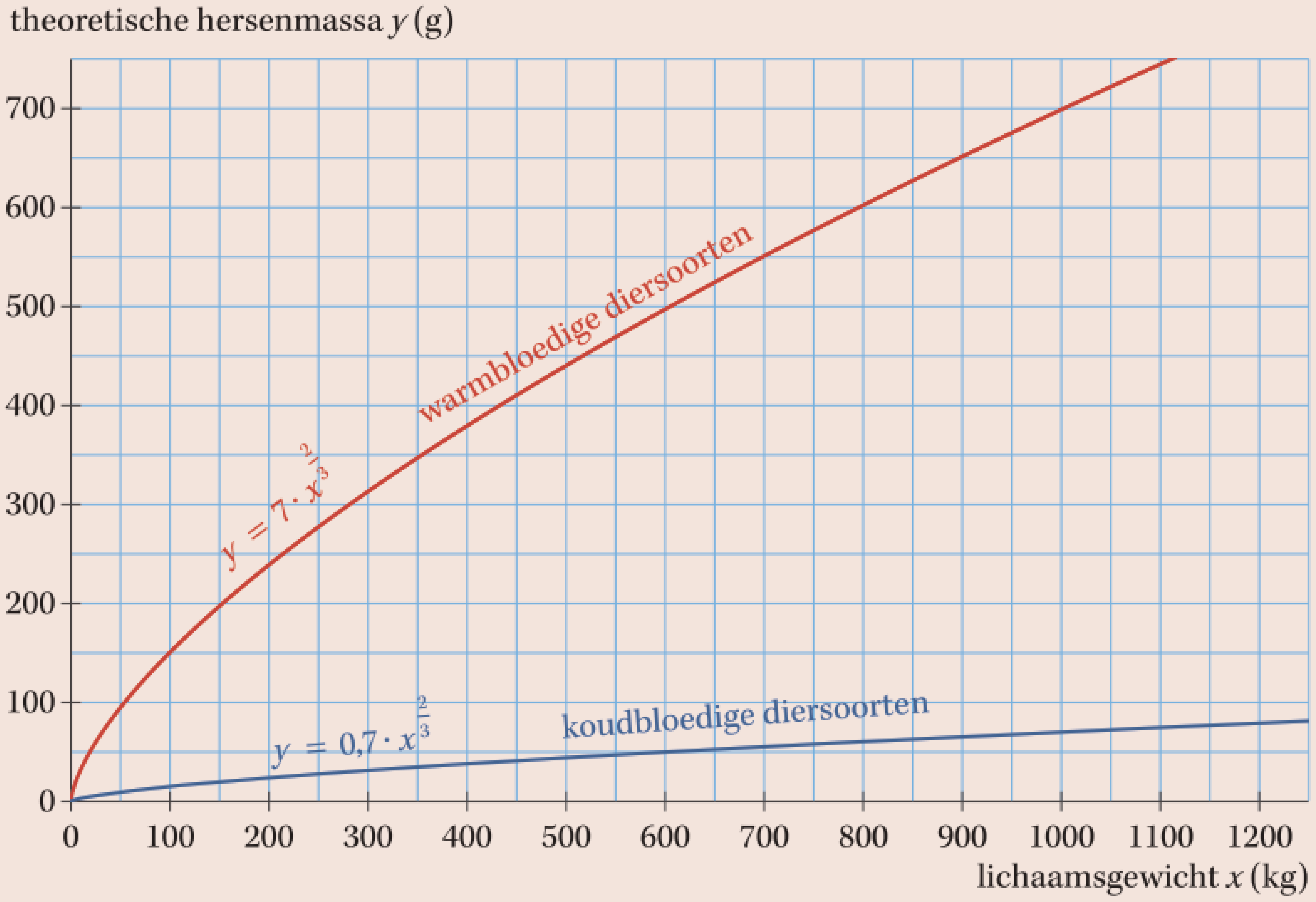
$$y = 7 \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

y : theoretische hersenmassa in gram
x : lichaamsgewicht in kilogram

- Formule voor koudbloedige diersoorten:

$$y = 0{,}7 \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

y : theoretische hersenmassa in gram
x : lichaamsgewicht in kilogram



De meeste diersoorten hebben een hersenmassa die afwijkt van de theoretische hersenmassa die behoort bij hun lichaamsgewicht.

1 Bereken met welke factor we de theoretische hersenmassa van een warmbloedige homo sapiens met een lichaamsgewicht van 68 kg moeten vermenigvuldigen om de werkelijke hersenmassa van 1400 g te verkrijgen.

2 Bereken met welke factor we de theoretische hersenmassa van een koudbloedige kikker met een lichaamsgewicht van 0,018 kg moeten vermenigvuldigen om de werkelijke hersenmassa van 0,96 g te verkrijgen.

De factor waarmee we de theoretische hersenmassa moeten vermenigvuldigen om de werkelijke hersenmassa te verkrijgen, bepaalt de graad van intelligentie: hoe groter de factor, hoe verstandiger. Als we warmbloedige en koudbloedige dieren met elkaar zouden vergelijken, komen we tot de ontnuchterende ontdekking dat de kikker relatief verstandiger is dan de mens.

In de vergelijkende tabel beperken we ons tot warmbloedige diersoorten.

3 Vul de tabel aan en nummer de diersoorten van 1 (voor verstandelijk zwak) tot 8 (voor verstandelijk begaafd).

diersoort	lichaams-gewicht (kg)	werkelijke hersenmassa (g)	theoretische hersenmassa (g)	factor	rangorde
mens	68	1400			
kangoeroe	35	56			
baviaan	30	140			
dolfijn	160	1700			
kameel	530	680			
konijn	2,5	12			
eekhoorn	0,9	6			
walrus	2500	1120			

1.2 Logaritmen

Machten en logaritmen

1 Instap

Muizen hebben zich verspreid over alle continenten van de wereld. Ze voeden zich met granen en zaden en vallen zelf ten prooi aan kleine roofdieren. Van uitroeiing zijn deze knaagdieren gevrijwaard omdat ze over een gezond voortplantingsvermogen beschikken.

Als experiment zetten we één drachtige muis in een voedselrijk laboratoriumgebied zonder roofdieren. Het aantal nakomelingen van deze muis zal snel toenemen.
De bevolkingsexplosie beschrijven we met de formule:



$n = 10^{\frac{t}{6}}$

n : aantal muizen
t : tijd in maanden

Na 9 maanden tellen we 31 muizen:

$n = 10^{\frac{9}{6}} = 10^{1,5} = 31,6227...$

1 Hoeveel muizen telt het testgebied na 18, 27 en 36 maanden?

tijd t (maanden)	9	18	27	36
aantal muizen n	31	....	....	....

2 We kunnen ook bepalen na hoeveel maanden de kolonie 10 muizen telt.

Om dit te berekenen, stellen we in de formule n gelijk aan 10: $10 = 10^{\frac{t}{6}}$.

Na 6 maanden telt de kolonie 10 muizen omdat voor $t = 6$ de gelijkheid $10 = 10^{\frac{6}{6}}$ ontstaat.
Na hoeveel maanden zullen we in de kolonie 100, 1000 en 10 000 muizen aantreffen?

aantal muizen n	10	100	1000	10 000
tijd t (maanden)	6	....	....	....

....

....

....

....

Machten en logaritmen

In de gelijkheid $3^4 = 81$ is 4 de exponent waartoe we 3 moeten verheffen om 81 te verkrijgen.

We noemen het getal 4 de **3-logaritme** van 81.

We schrijven: $4 = {}^3\log 81$

We lezen: 4 is de 3-logaritme van 81

a-logaritmen

De ***a*-logaritme** van x is de exponent y waartoe we a moeten verheffen om x te verkrijgen.

$${}^a\log x = y \iff a^y = x \qquad a > 0 \text{ en } a \neq 1, \quad x > 0$$

Een andere benaming is **logaritme met grondtal *a***. In ${}^a\log x$ is a het **grondtal** en x het **argument**. Grondtallen van logaritmen zijn altijd groter dan 0 en verschillend van 1.

Voorbeelden

${}^2\log 8 = 3$ $\qquad 2^3 = 8$

${}^3\log \frac{1}{3} = -1$ $\qquad 3^{-1} = \frac{1}{3}$

${}^4\log 1 = 0$ $\qquad 4^0 = 1$

${}^2\log \sqrt{2} = \frac{1}{2}$ $\qquad 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

${}^5\log(-25)$ bestaat niet omdat een macht van 5 altijd positief is.

Merk op

Alleen strikt positieve getallen hebben een logaritme.
Een logaritme zelf kan positief, negatief of nul zijn.

Eigenschappen

De logaritme van het grondtal is altijd 1.

$${}^a\log a = 1 \qquad a^1 = a$$

De logaritme van 1 is 0.

$${}^a\log 1 = 0 \qquad a^0 = 1$$

De logaritme van een macht van het grondtal is gelijk aan de exponent.

$${}^a\log a^x = x \qquad a^x = a^x$$

Voorbeelden

$^{2}\log 2 = 1$

$^{3}\log 1 = 0$

$^{6}\log 36 = {}^{6}\log 6^2 = 2$

2

Schrijf de exponent van de macht als een logaritme.

1 $3^2 = 9$ $2 = \ldots$

2 $4^3 = 64$ $3 = \ldots$

3 $2^4 = 16$ $4 = \ldots$

4 $5^{-2} = \frac{1}{25}$ $-2 = \ldots$

5 $3^{-4} = \frac{1}{81}$ $-4 = \ldots$

6 $0{,}5^3 = 0{,}125$ $3 = \ldots$

7 $1{,}1^2 = 1{,}21$ $2 = \ldots$

8 $27^{\frac{1}{3}} = 3$ $\frac{1}{3} = \ldots$

9 $8^{\frac{2}{3}} = 4$ $\frac{2}{3} = \ldots$

10 $64^{1{,}5} = 512$ $1{,}5 = \ldots$

3

Bereken.

1 $^{2}\log 16 = \ldots$

2 $^{3}\log 27 = \ldots$

3 $^{7}\log 49 = \ldots$

4 $^{5}\log 125 = \ldots$

5 $^{29}\log 29 = \ldots$

6 $^{8}\log 64 = \ldots$

7 $^{4}\log 64 = \ldots$

8 $^{2}\log 64 = \ldots$

9 $^{64}\log 64 = \ldots$

10 $^{64}\log 1 = \ldots$

4

Bereken.

1 $^{a}\log a^2 = \ldots$

2 $^{a}\log a = \ldots$

6 $^{a}\log \sqrt{a} = \ldots$

7 $^{a}\log \sqrt[5]{a} = \ldots$

3 $^{a}\log 1 =$ ....

4 $^{a}\log \frac{1}{a} =$ ....

5 $^{a}\log \frac{1}{a^5} =$ ....

8 $^{a}\log \sqrt[3]{a^2} =$ ....

9 $^{a}\log \sqrt[4]{a^3} =$ ....

10 $^{a}\log a\sqrt{a} =$ ....

5

Bereken.

1 $^{6}\log \frac{1}{36} =$ ....

2 $^{100}\log 0{,}01 =$ ....

3 $^{\frac{1}{3}}\log \frac{1}{27} =$ ....

4 $^{7}\log \sqrt{7} =$ ....

5 $^{5}\log \sqrt[3]{5} =$ ....

6 $^{2}\log 8^3 =$ ....

7 $^{8}\log 2 =$ ....

8 $^{5}\log 25^3 =$ ....

9 $^{4}\log 2^{14} =$ ....

10 $^{9}\log 3^{-12} =$ ....

6

Bereken x.

1 $^{2}\log x = 3$

....

2 $^{5}\log x = -2$

....

3 $^{4}\log x = \frac{1}{2}$

....

4 $^{9}\log x = -\frac{1}{2}$

....

5 $^{x}\log 10 = 1$

....

6 $^{x}\log 32 = 5$

....

7 $^{x}\log 4 = \frac{1}{2}$

....

8 $^{x}\log \frac{1}{4} = -2$

....

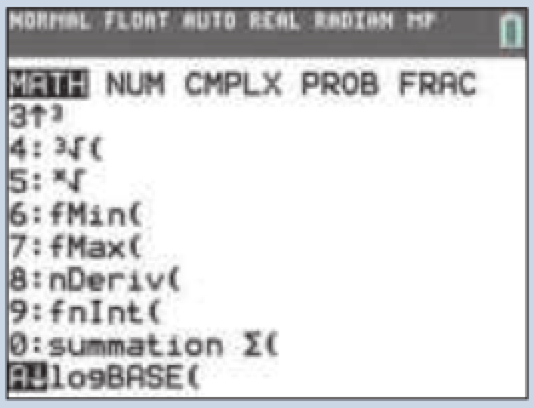
a-logaritmen berekenen

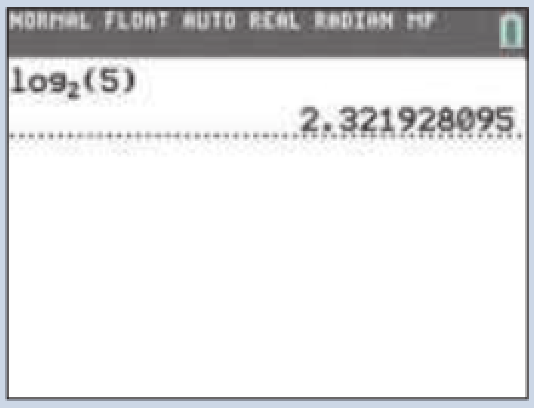
We berekenen $^{2}\log 5$.

TEXAS INSTRUMENTS

Met de optie logBASE uit het rekenmenu MATH berekenen we logaritmen.

- [MATH] [A: logBASE] 2 ► 5 [ENTER]

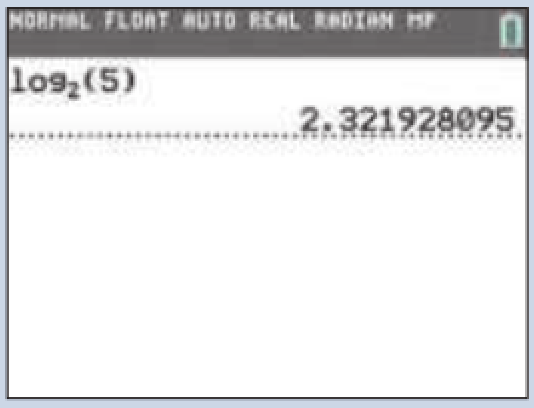




We kunnen ook de sneltoets F2 gebruiken.

- [ALPHA] [F2] [5: logBASE] 2 ► 5 [ENTER]

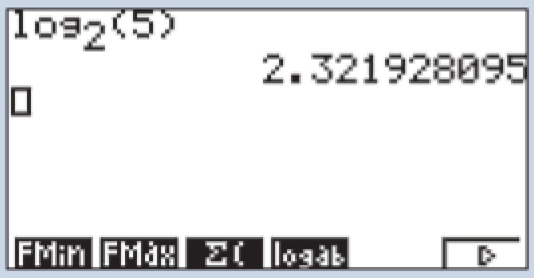




CASIO

Met de optie logab uit het rekenmenu CALC berekenen we logaritmen.

- [MENU] [1: RUN·MAT] [OPTN] [F4: CALC] [F6: ▷] [F4: logab] 2 ► 5 [EXE]



7

Bereken met ICT. Rond af op 5 decimalen.

1 $^{2}\log 15 =$ ....

2 $^{5}\log 2 =$ ....

3 $^{6}\log 0{,}232 =$ ....

4 $^{15}\log 2 =$ ....

5 $^{1{,}2}\log 21 =$ ....

6 $^{0{,}1}\log 231 =$ ....

Tiendelige logaritmen

De logaritme met grondtal 10 noemen we de **tiendelige logaritme** of de **Briggse logaritme**, genoemd naar de Engelse wiskundige Henry Briggs (1561-1630). Deze logaritme wordt kortweg met **log** aangeduid.

$\log x = y \quad \Leftrightarrow \quad 10^y = x \qquad x > 0$

Voorbeelden

$\log 1000 = \log 10^3 = 3$

$\log 10 = 1$

$\log 1 = 0$

$\log 0{,}01 = \log 10^{-2} = -2$

8

Bereken zonder ICT.

1 $\log 100 =$ ……………

2 $\log 10\,000 =$ ……………

3 $\log 10^3 =$ ……………

4 $\log 10^{-6} =$ ……………

5 $\log 0{,}1 =$ ……………

6 $\log 0{,}001 =$ ……………

7 $\log \frac{1}{100} =$ ……………

8 $\log \frac{1}{10\,000} =$ ……………

9 $\log \sqrt[3]{10} =$ ……………

10 $\log \sqrt[5]{100} =$ ……………

9

Bereken x zonder ICT.

1 $\log x = 5$

……………

2 $\log x = 2$

……………

3 $\log x = 0$

……………

4 $\log x = 1$

……………

5 $\log x = -2$

……………

6 $\log x = \frac{1}{2}$

……………

10

Bereken zonder ICT.

1 $\log\left(10 \cdot \sqrt{10}\right) =$ ....

2 $\log\left(10^2 \cdot \sqrt[3]{10}\right) =$ ....

3 $\log\left(10^4 \cdot \sqrt[4]{10^3}\right) =$ ....

4 $\log \dfrac{\sqrt[5]{10^3}}{10} =$ ....

Tiendelige logaritmen berekenen

We berekenen log 300.

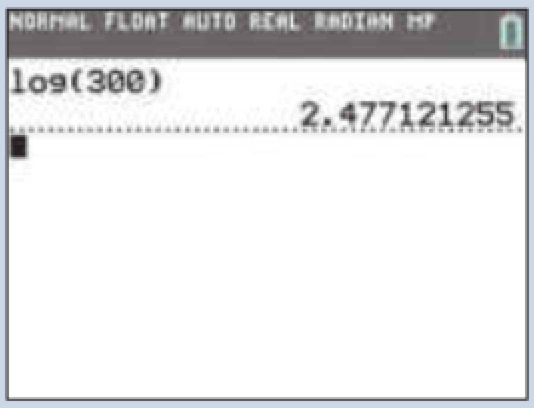
TEXAS INSTRUMENTS

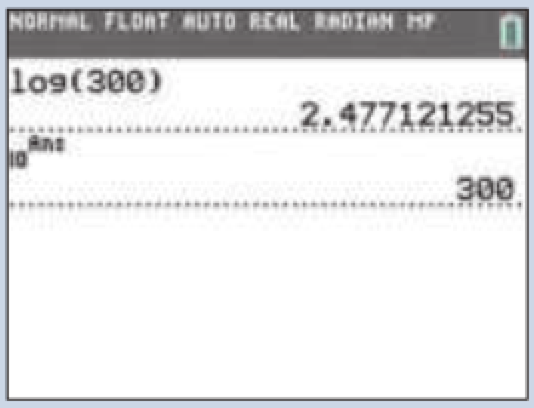
We gebruiken de toets LOG.

- [LOG] 300 [)] [ENTER]

Ter controle berekenen we de macht van 10 met het antwoord als exponent.

- [2ND] [10^x] [2ND] [ANS] [ENTER]





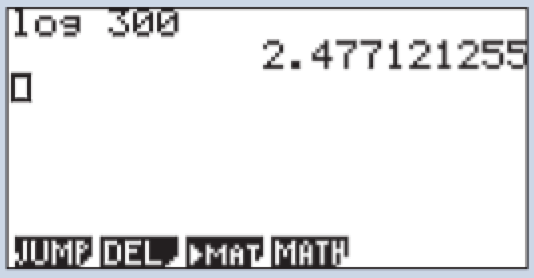
CASIO

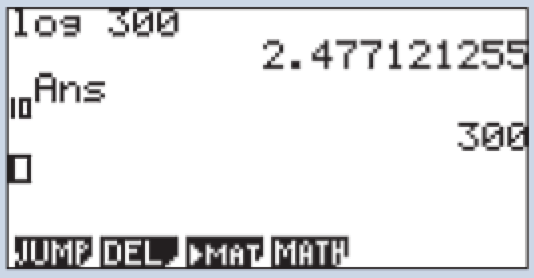
We gebruiken de toets log.

- [MENU] [1: RUN·MAT] [log] 300 [EXE]

Ter controle berekenen we de macht van 10 met het antwoord als exponent.

- [SHIFT] [10^x] [SHIFT] [Ans] [EXE]





11

Bereken met ICT. Rond af op 5 decimalen.

1 $\log 5 =$ ....

2 $\log 50 =$ ....

3 $\log 591 =$ ....

4 $\log 5{,}91 =$ ....

5 $\log 1789 =$ ....

6 $\log \sqrt{1789} =$ ....

7 $\log \pi =$ ....

8 $\log \frac{22}{7} =$ ....

9 $\log 0{,}1302 =$ ....

10 $\log 0{,}1302^2 =$ ....

12

Bereken x. Rond af op 2 decimalen.

1 $\log x = \frac{1}{2}$ $x =$ ....

2 $\log x = \frac{2}{3}$ $x =$ ....

3 $\log x = -0{,}1$ $x =$ ....

4 $\log x = -1{,}5$ $x =$ ....

5 $\log x = 3{,}14$ $x =$ ....

6 $\log x = \pi$ $x =$ ....

7 $\log x = 2\pi$ $x =$ ....

8 $\log x = -\sqrt{2}$ $x =$ ....

9 $\log x = \sqrt{10}$ $x =$ ....

10 $\log x = -0{,}9$ $x =$ ....

13

Tussen welke twee gehele getallen ligt log 7 358 092 115 763?
Los eerst op zonder ICT. Controleer daarna met ICT.

....

....

....

....

Rekenen met logaritmen

14 Instap

In de linkerkolom van de tabel staan sommen, verschillen en veelvouden van logaritmen. Elk van deze bewerkingen is gelijk aan één of meerdere uitdrukkingen die op dezelfde rij staan. Bereken deze uitdrukkingen met de rekenmachine en kleur de passende vakjes.

$\log 4 + \log 3 =$	$\log(4+3)$	1,079...	$\log 4 \cdot \log 3$	$\log(4 \cdot 3)$
$\log 5 - \log 2 =$	$\log(5-2)$	$\dfrac{\log 5}{\log 2}$	$\log \dfrac{5}{2}$	0,397...
$3 \cdot \log 2 =$	$\log(3 \cdot 2)$	$\log 2^3$	0,903...	$(\log 2)^3$
$\log 10^4 + \log 10^2 =$	$\log(10^4 + 10^2)$	6	$(\log 10)^6$	$\log(10^4 \cdot 10^2)$
$\dfrac{1}{3} \cdot \log 5 =$	$\log\left(\dfrac{1}{3} \cdot 5\right)$	$\log \dfrac{5}{3}$	$\log \sqrt[3]{5}$	$\log \sqrt[5]{3}$
$\log 10^6 - \log 10^2 =$	$\log(10^6 - 10^2)$	4	$(\log 10)^4$	$\log \dfrac{10^6}{10^2}$

De rekenresultaten uit de tabel laten vermoeden dat we bewerkingen met logaritmen kunnen schrijven als één logaritme. Vul aan.

1 $\log a + \log b =$ ....

2 $\log a - \log b =$ ....

3 $r \cdot \log a =$ ....

Rekenregels voor logaritmen

Bewerkingen met logaritmen kunnen we schrijven als één logaritme, of omgekeerd.

Rekenregel voor som van logaritmen

De som van logaritmen is de logaritme van een product.

$$^a\log x_1 + {}^a\log x_2 = {}^a\log(x_1 \cdot x_2)$$

Rekenregel voor verschil van logaritmen

Het verschil van logaritmen is de logaritme van een quotiënt.

$$^a\log x_1 - {}^a\log x_2 = {}^a\log \frac{x_1}{x_2}$$

Rekenregel voor veelvoud van logaritme

Een veelvoud van een logaritme is de logaritme van een macht.

$r \cdot {}^{a}\log x = {}^{a}\log x^{r}$

Voor het aantonen van deze rekenregels verwijzen we naar de opdrachten.

Voorbeelden

$$\log 10 + \log 100 = \log(10 \cdot 100) = \log 1000$$
$$1 + 2 = 3$$

$$^{2}\log 8 - {}^{2}\log 4 = {}^{2}\log \frac{8}{4} = {}^{2}\log 2$$
$$3 - 2 = 1$$

$$2 \cdot {}^{5}\log 5 = {}^{5}\log 5^{2}$$
$$2 \cdot 1 = 2$$

15

Bereken door toepassing van de rekenregels van logaritmen.

1 $^{6}\log 3 + {}^{6}\log 12 =$ ....

2 $\log 4 + \log 2{,}5 =$ ....

3 $^{5}\log 250 - {}^{5}\log 2 =$ ....

4 $^{2}\log 5 - {}^{2}\log 10 =$ ....

5 $2 \cdot {}^{9}\log 3 =$ ....

6 $6 \cdot {}^{4}\log 2 =$ ....

7 $2 \cdot {}^{3}\log 5 + {}^{3}\log 2 - {}^{3}\log 50 =$ ....

8 $^{7}\log \sqrt{2} + {}^{7}\log \sqrt{5} - \frac{1}{2} \cdot {}^{7}\log 10 =$ ....

....

16

Schrijf als een a-logaritme.

1 $^{a}\log x + {}^{a}\log y - {}^{a}\log z =$ ....

2 $^{a}\log x - {}^{a}\log y + {}^{a}\log z =$ ....

3 $3 \cdot {}^{a}\log x =$ ....

4 $-{}^{a}\log x =$ ....

5 $2 \cdot {}^{a}\log x + {}^{a}\log y =$ ....

6 $^{a}\log x - 3 \cdot {}^{a}\log y =$ ....

7 $\frac{1}{3} \cdot {}^{a}\log x - 2 \cdot {}^{a}\log y + {}^{a}\log z =$ ....

....

8 $\frac{1}{5}({}^{a}\log x + 3 \cdot {}^{a}\log y) - 2 \cdot {}^{a}\log z =$ ....

....

....

17

Schrijf als som en verschil van logaritmen.

1 $^{a}\log(x^{4}y) =$ ....

2 $^{a}\log \frac{xy}{z} =$ ....

3 $^{a}\log(x^{4}y^{3}) =$ ....

4 $^{a}\log\left(x\sqrt{y}\right) =$ ....

5 $^{a}\log\left(x\sqrt[3]{y^2}\right) =$ ....

6 $^{a}\log\dfrac{x^2y^5}{z^3} =$ ....

....

18

Als $\log 2 = a$ en $\log 3 = b$, dan is $\log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = a + b$.

Druk de logaritme uit in a en b.

1 $\log 18 =$ ....

2 $\log\dfrac{2}{9} =$ ....

3 $\log 5 =$ ....

4 $\log 0{,}4 =$ ....

5 $\log 810 =$ ....

6 $\log 0{,}125 =$ ....

19

Toon de rekenregel voor logaritmen aan. Vul het bewijs aan.

1 $^{a}\log x_1 + {}^{a}\log x_2 = {}^{a}\log(x_1 \cdot x_2)$

Stel:	$^{a}\log x_1 = y_1$	en	$^{a}\log x_2 = y_2$	
dan:	$x_1 =$	en	$x_2 =$	a-logaritme
Vul aan:	$x_1 \cdot x_2 =$			zie hoger
	$x_1 \cdot x_2 =$			product van gelijknamige machten
	....			a-logaritme nemen van beide leden
	....			logaritme van macht van grondtal
	....			beide leden van plaats verwisselen
	....			y_1 en y_2 vervangen

2 $r \cdot {}^a\log x = {}^a\log x^r$

Stel: ${}^a\log x = y$

dan: $x =$ .... — *a*-logaritme

Vul aan: $x^r =$ .... — zie hoger

$x^r =$ .... — macht van een macht

.... — *a*-logaritme nemen van beide leden

.... — logaritme van macht van grondtal

.... — beide leden van plaats verwisselen

.... — *y* vervangen

3 ${}^a\log x_1 - {}^a\log x_2 = {}^a\log \dfrac{x_1}{x_2}$

${}^a\log x_1 - {}^a\log x_2 = {}^a\log x_1 + {}^a\log$ .... — veelvoud van logaritme

$=$ .... — som van logaritmen

$=$ .... — delen door een getal is vermenigvuldigen met zijn omgekeerde

Verband tussen *a*-logaritmen en tiendelige logaritmen

De *a*-logaritme van een getal *x* kunnen we schrijven met tiendelige logaritmen.

Stel: ${}^a\log x = y$

dan: $a^y = x$ — **verband tussen *a*-logaritme en macht van *a***

$\log a^y = \log x$ — **logaritme nemen van beide leden**

$y \cdot \log a = \log x$ — **rekenregel voor veelvoud van logaritme**

$y = \dfrac{\log x}{\log a}$ — **beide leden vermenigvuldigen met $\dfrac{1}{\log a}$**

Bijgevolg: $\boldsymbol{{}^a\log x = \dfrac{\log x}{\log a}}$

Voorbeelden

Met deze formule kunnen we logaritmen met willekeurige grondtallen berekenen met de log-toets.

${}^3\log 9 = \dfrac{\log 9}{\log 3} = 2$

${}^3\log 5 = \dfrac{\log 5}{\log 3} = 1{,}46$ — **afronden op 2 decimalen**

${}^4\log 24 = \dfrac{\log 24}{\log 4} = 2{,}29$ — **afronden op 2 decimalen**

Verband tussen *a*-logaritme en *b*-logaritme

Op analoge wijze kunnen we de *a*-logaritme van een getal *x* schrijven met de *b*-logaritme van *x* en van *a*.

$$^{a}\log x = \frac{^{b}\log x}{^{b}\log a}$$

Met deze formule kunnen we logaritmen veranderen van grondtal.

20

Bereken met de log-toets. Rond af op 5 decimalen.

1. $^{2}\log 7 =$ ....
2. $^{3}\log 37 =$ ....
3. $^{7}\log 777 =$ ....
4. $^{12}\log 0{,}45 =$ ....
5. $^{4}\log \frac{1}{7} =$ ....
6. $^{4}\log 0{,}111 =$ ....
7. $^{2{,}4}\log 75 =$ ....
8. $^{0{,}5}\log 256 =$ ....
9. $^{0{,}7}\log 62 =$ ....
10. $^{\frac{1}{3}}\log \frac{5}{11} =$ ....

21

Toon de gelijkheid aan.

1. $^{b}\log a = \dfrac{1}{^{a}\log b}$

....

2. $^{a}\log b \cdot {}^{b}\log c = {}^{a}\log c$

....

3. $^{a}\log b = {}^{a^n}\log b^n$

....

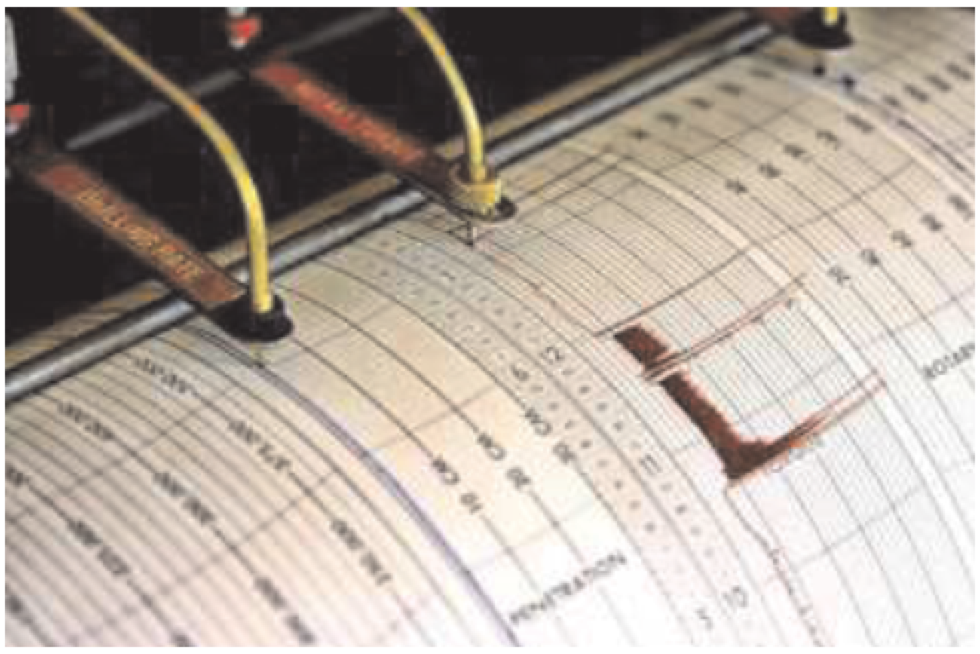
4 $^{a}\log b = {}^{\frac{1}{a}}\log \frac{1}{b}$

....

22

Voor de kust van de Zuid-Turkse badplaats Antalya vond zaterdag 28 december 2013 een aardbeving plaats. De vrijgekomen energie bedroeg $1{,}78 \cdot 10^{13}$ joule en werd berekend met de formule $E = 25\,000 \cdot 10^{\frac{3M}{2}}$ waarin M de magnitude van de aardschok op de schaal van Richter voorstelt. De magnitude van een aardbeving valt volgens de Amerikaanse seismoloog Charles Francis Richter (1900-1985) samen met de maximale versnelling van de bodembeweging in het epicentrisch gebied. Richter stelde in 1935 een schaal op die de kracht van een aardbeving uitdrukt in een getal.





1 Elk jaar worden gemiddeld 3000 bevingen geregistreerd met magnitude 5 en slechts één met magnitude 8. De meeste van deze bevingen komen voor tot op een diepte van 30 km. Is de totale vrijgekomen energie van de bevingen met magnitude 5 groter of kleiner dan die met magnitude 8?

....

....

....

....

....

....

2 Vorm de formule om tot een formule die de magnitude M uitdrukt in functie van de vrijgekomen energie E.

3 Bereken de magnitude van de aardschok die Turkije trof.

4 Hoeveel keer sterker is een aardbeving met kracht 8 op de schaal van Richter, dan een aardschok met kracht 7?

Uitdagingen

1 Bereken de logaritmische vorm met grondtal a.

1. ${}^{a}\log a^{a}$
2. ${}^{a}\log\left({}^{a}\log a\right)$
3. ${}^{a}\log\left({}^{a}\log a^{a}\right)$
4. $a^{{}^{a}\log a}$
5. $a^{{}^{a}\log \frac{1}{a}}$
6. $a^{{}^{a}\log a^{a}}$

2 Schrijf de natuurlijke getallen van 1 tot en met 5 als een macht van 10.
Rond de exponent af op 3 decimalen.

3 Rangschik de getallen van klein naar groot.

$7^{(8^{9})}$ $8^{(9^{7})}$ $9^{(7^{8})}$ $7^{(9^{8})}$ $8^{(7^{9})}$ $9^{(8^{7})}$

4 Uit hoeveel cijfers bestaat de uitkomst van de machtsverheffing?

Aanwijzing: als $1 < \log x < 2$, dan $10 < x < 100$
als $2 < \log x < 3$, dan $100 < x < 1000$
als $n < \log x < n+1$, dan $10^{n} < x < 10^{n+1}$

1. 2^{2014}
2. 101^{101}

5 Bepaal de natuurlijke getallen waarvan

1. de achtste macht bestaat uit zeven cijfers.
2. de zevende macht bestaat uit acht cijfers.

6 Bewijs de rekenregel ${}^{a}\log x = \dfrac{{}^{b}\log x}{{}^{b}\log a}$ voor het veranderen van grondtal bij logaritmen.

7 Toon aan dat $\dfrac{{}^{a}\log x}{{}^{b}\log x}$ onafhankelijk is van x.

8 Een nieuwe kunstvezel dempt het geluid van een benzinemotor van 95 db tot 40 db. Met de formule $N = N_0 \cdot (1 - p)^d$ kunnen we het gedempte geluidsniveau N van een ongedempt geluidsniveau N_0 berekenen bij een dempingspercentage p en een wanddikte d uitgedrukt in mm.

1 Leid uit de gegeven formule een formule af voor de wanddikte d.

2 Hoe dik is de kunststofwand als de demping 4,5 % per mm wanddikte bedraagt?

9 Ontdek de fout. Welke overgang klopt niet en waarom?

$$2 < 3$$

$$\overset{1}{\Rightarrow} \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

$$\overset{2}{\Rightarrow} \frac{1}{3} \cdot \log \frac{1}{64} < \frac{1}{2} \cdot \log \frac{1}{64}$$

$$\overset{3}{\Rightarrow} \log \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}} < \log \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{4}{\Rightarrow} \log \sqrt[3]{\frac{1}{64}} < \log \sqrt{\frac{1}{64}}$$

$$\overset{5}{\Rightarrow} \log \frac{1}{4} < \log \frac{1}{8}$$

$$\overset{6}{\Rightarrow} \frac{1}{4} < \frac{1}{8}$$

$$\overset{7}{\Rightarrow} 4 > 8$$

$$\overset{8}{\Rightarrow} 1 > 2$$

Exploratie

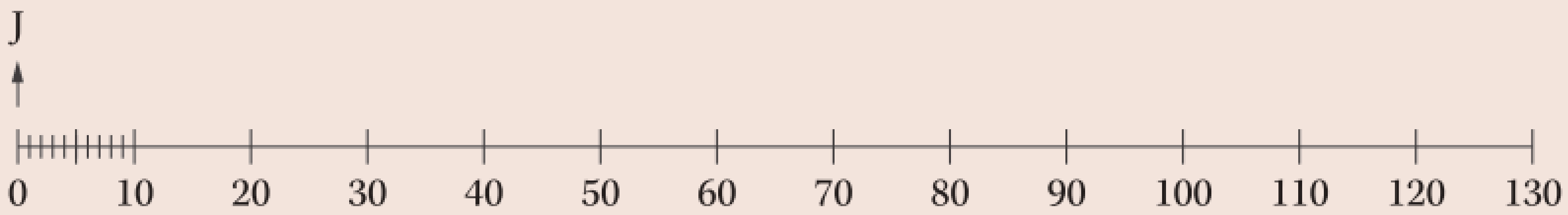
Een logaritmische schaal voor geluidsintensiteit

De intensiteit van een geluidsgolf op het trommelvlies is de energie die per seconde door één vierkante centimeter vliesoppervlakte dringt. Deze intensiteit stellen we voor met het symbool I en drukken we uit in watt per vierkante centimeter (W/cm²). In de tabel zijn enkele klassieke geluidsintensiteiten genoteerd.

	I	R		N
discotheek	10^{-3} W/cm²	10^{13}	A	130
pijndrempel	10^{-4} W/cm²		B	
fabriekswerkplaats	10^{-6} W/cm²		C	
onweer	$5 \cdot 10^{-7}$ W/cm²		D	
druk verkeer	10^{-8} W/cm²		E	
luid gesprek	$5 \cdot 10^{-11}$ W/cm²		F	
zacht gefluister	10^{-12} W/cm²		G	
bos	10^{-14} W/cm²		H	
tikkende klok	10^{-15} W/cm²		I	
gehoorgrens	10^{-16} W/cm²	1	J	0

1 Omdat een geluidsintensiteit een zeer kleine waarde heeft, definiëren we de relatieve intensiteit R als $R = \dfrac{I}{I_0}$ waarbij I_0 het zwakst hoorbare geluid met een intensiteit van 10^{-16} W/cm² voorstelt. Deze relatieve intensiteit is een onbenoemd getal.
Vul de kolom van de relatieve intensiteit R in.

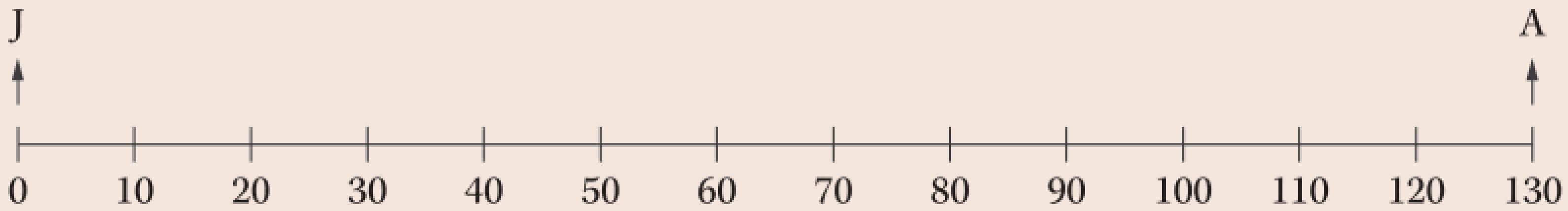
2 Stel de R-waarden met de bijbehorende letter voor op de getallenas.



Hoeveel R–waarden kunnen we op deze as voorstellen?

3 Om het nadeel van het werken met grote getallen te omzeilen, definiëren we het intensiteitsniveau N als $N = 10 \cdot \log R$. Het intensiteitsniveau drukken we uit in decibel (db). Vul de kolom van het intensiteitsniveau N in.

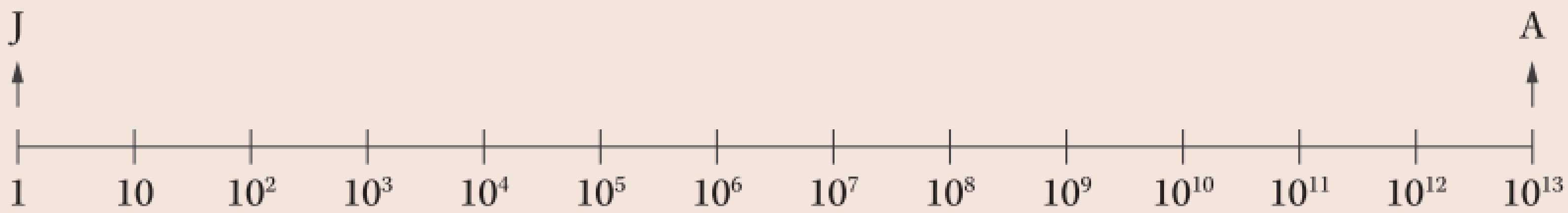
4 Stel de N-waarden met de bijbehorende letter voor op de getallenas.



Kunnen we alle N-waarden voorstellen op deze as?

5 Stel de R-waarden voor op de getallenas met logaritmische schaalverdeling.

Op een getallenas met logaritmische schaalverdeling is de afstand van een punt met abscis x tot het beginpunt 1 gelijk aan $\log x$. Het getal 1 is het beginpunt van de logaritmische schaal omdat $\log 1 = 0$.



Toon aan dat de delen van de schaal van 1 tot 10, van 10 tot 100 en van 100 tot 1000 dezelfde lengte hebben.

2

Exponentiële functies

Volgens demografen overschreed de wereldbevolking pas in 1804 de grens van één miljard. In 1927 waren er twee miljard aardbewoners. Het derde miljard raakte in 1959 vol, het vierde in 1974, het vijfde in 1987, het zesde in 1999 en de zeven miljardste wereldburger kwam in 2011 ter wereld. Volgens de VN dreigen wij, of onze nakomelingen, tegen het einde van de 21e eeuw met elf miljard op de planeet rond te lopen. De wereldpopulatie kent een exponentiële groei.

De verdere ontwikkeling van de wereldbevolking is een complex gegeven.

- Beïnvloedt de daling van het aantal kinderen per vrouw de bevolkingsgroei?
- Wordt deze groei geremd door de toenemende luchtverontreiniging?
- In welke mate beïnvloeden het gebrek aan woonruimte en het gebrek aan voedsel de aangroei van de wereldbevolking?
- Kan een epidemie de aangroei stoppen? Ter herinnering: rond 1400 trof de pest zowat 25 % van de Europese bevolking.

2.1 Groeiverschijnselen

2.2 Soorten exponentiële groei



2.1 Groeiverschijnselen

Lineair verband

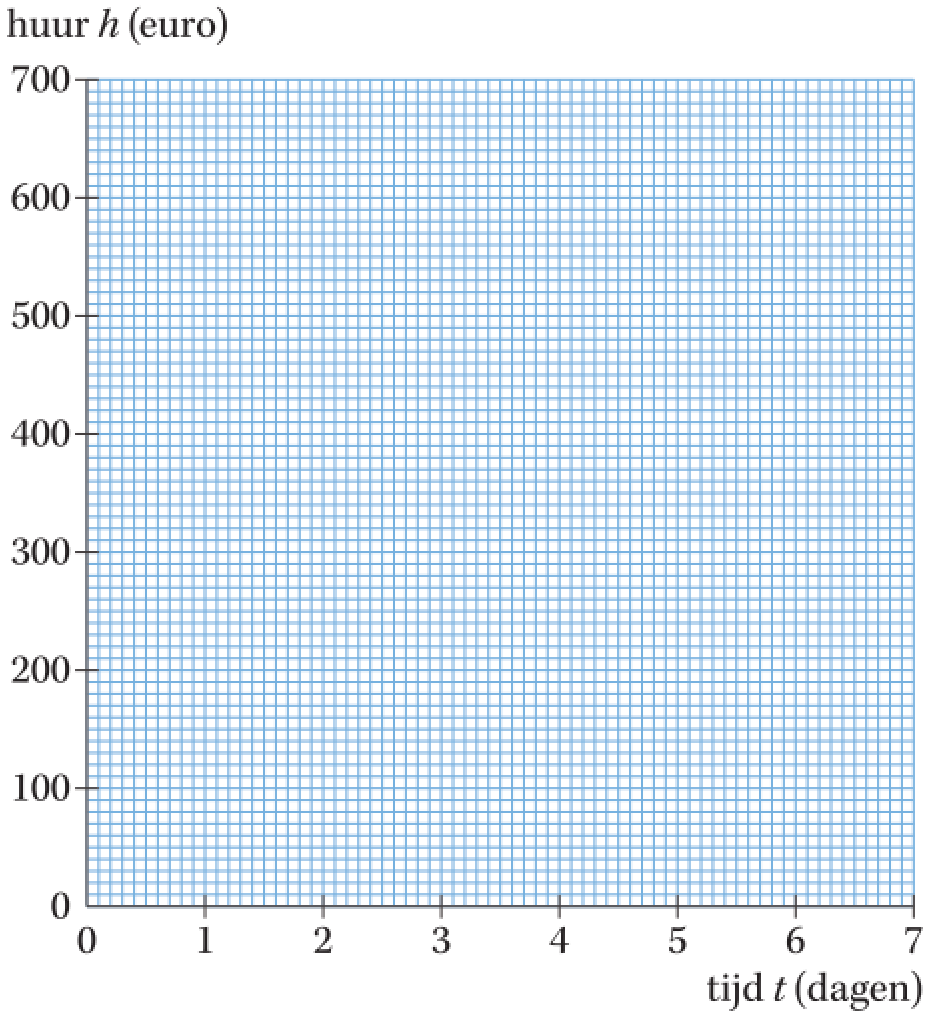
1 Instap

Wat is er heerlijker dan op een Vespa het prachtige Toscaanse landschap met zijn vele olijfbomen en wijngaarden te verkennen. In het hartje van de wijnstreek Chianti bevindt zich een Vespa verhuurbedrijf dat 300 euro waarborg aanrekent en 60 euro per dag voor een scooter.

1 Hoeveel betaalt Arno voor een scooter die hij gedurende 6 dagen huurt? Vul de tabel in en omcirkel het antwoord.

tijd t (dagen)	1	2	3	4	5	6
huur h (euro)	....	....	....	....	....	....

2 Teken de punten bij de tabel.





3 Met welke formule kunnen we de huur h voor een willekeurig aantal dagen t berekenen?

....

4 Verbind de punten van de grafiek. Liggen deze punten op een rechte? ....

5 Als we veronderstellen dat we de waarborg van 300 euro terugkrijgen, met welke formule kunnen we dan de huur h voor een willekeurig aantal dagen t berekenen?

....

6 Teken de grafiek bij deze formule.

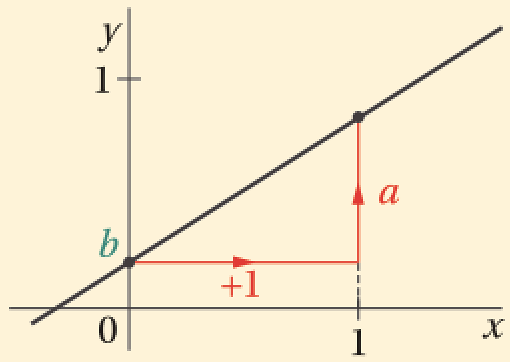
Lineaire verbanden herkennen

Een formule van de vorm

$y = ax + b$ $\quad a \neq 0$

beschrijft een **lineair verband** tussen x en y.

De grafiek bestaat uit punten die op een **rechte** liggen.



Voorbeeld

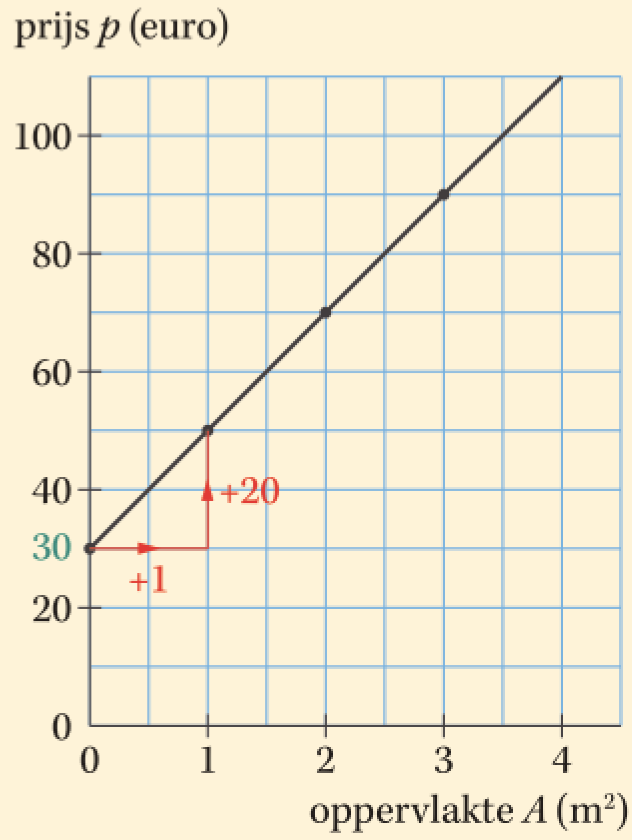
Een vloerder vraagt 20 euro per m² en 30 euro verplaatsingskosten. De prijs voor het vloeren berekenen we met de formule:

$p = 20A + 30$ $\quad p$: prijs in euro $\quad A$: oppervlakte in m²

De formule is van de vorm $y = ax + b$ met $a = 20$ en $b = 30$.

We stellen een tabel op en tekenen de grafiek.

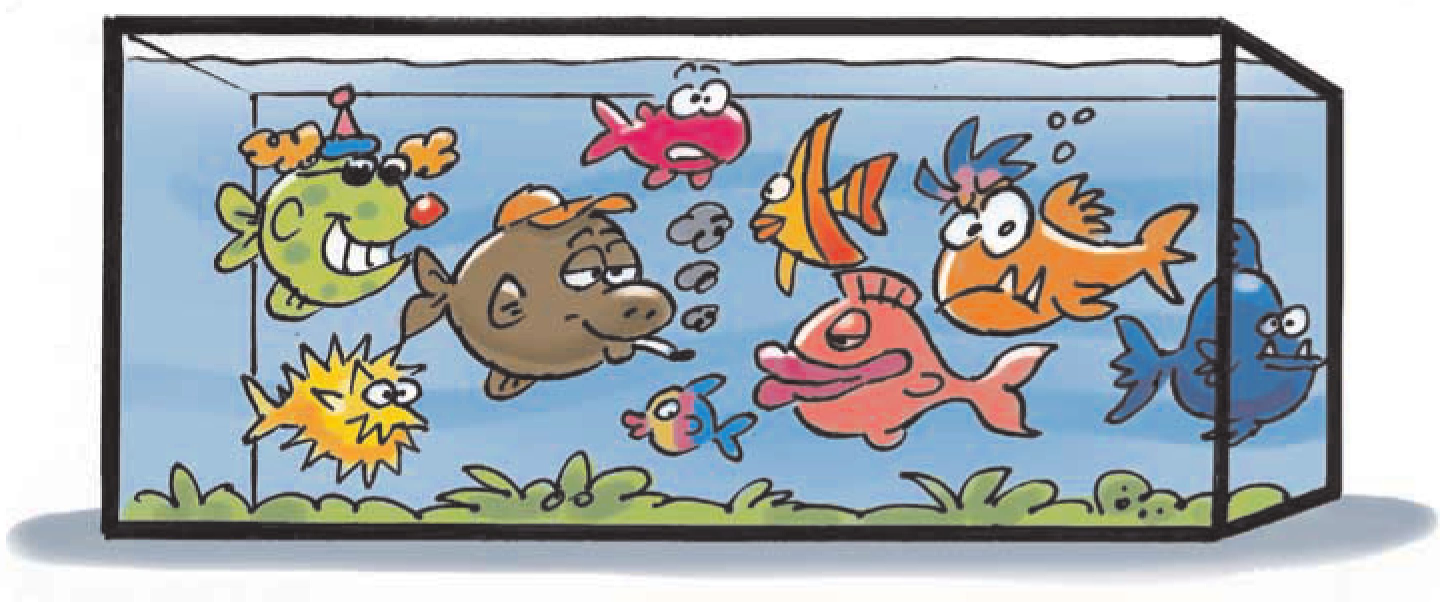
oppervlakte A (m²)	0	1	2	3
prijs p (euro)	30	50	70	90



We zeggen dat er een **lineair verband** bestaat tussen de oppervlakte A en de prijs p.

2

Een aquarium is tot op 30 cm hoogte met water gevuld. Door verdamping daalt het waterniveau dagelijks met 0,5 cm.



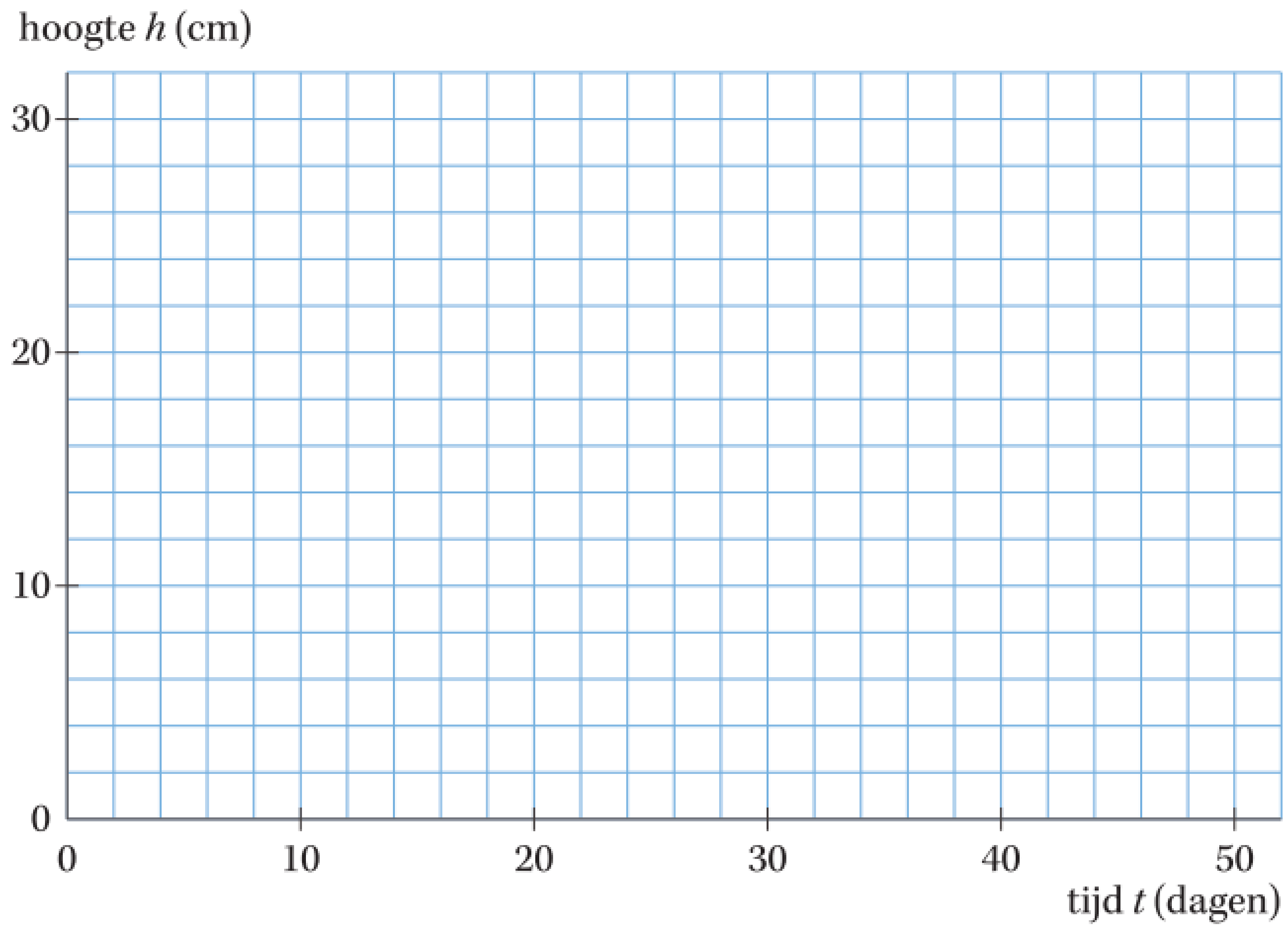
1 Vul de tabel in.

tijd t (dagen)	0	1	2	10	20	40
hoogte h (cm)	....	....	....	....	....	....

2 Met welke formule kunnen we de hoogte h van het water na t dagen berekenen?

....

3 Teken de grafiek die laat zien hoe het waterpeil zakt naarmate de dagen verstrijken.



4 Hoe hoog is het waterpeil na 1 week?

....

En na 2 weken?

....

5 De vissen hebben minstens 12 cm water nodig om te overleven. Na hoeveel dagen begint de situatie hopeloos te worden?

....

....

....

....

....

3

Een zeppelin vertrekt vanaf de grond en stijgt 105 m/min. Een deltavlieger vertrekt op hetzelfde ogenblik vanaf een 1100 m hoge bergflank en daalt 20 m/min.

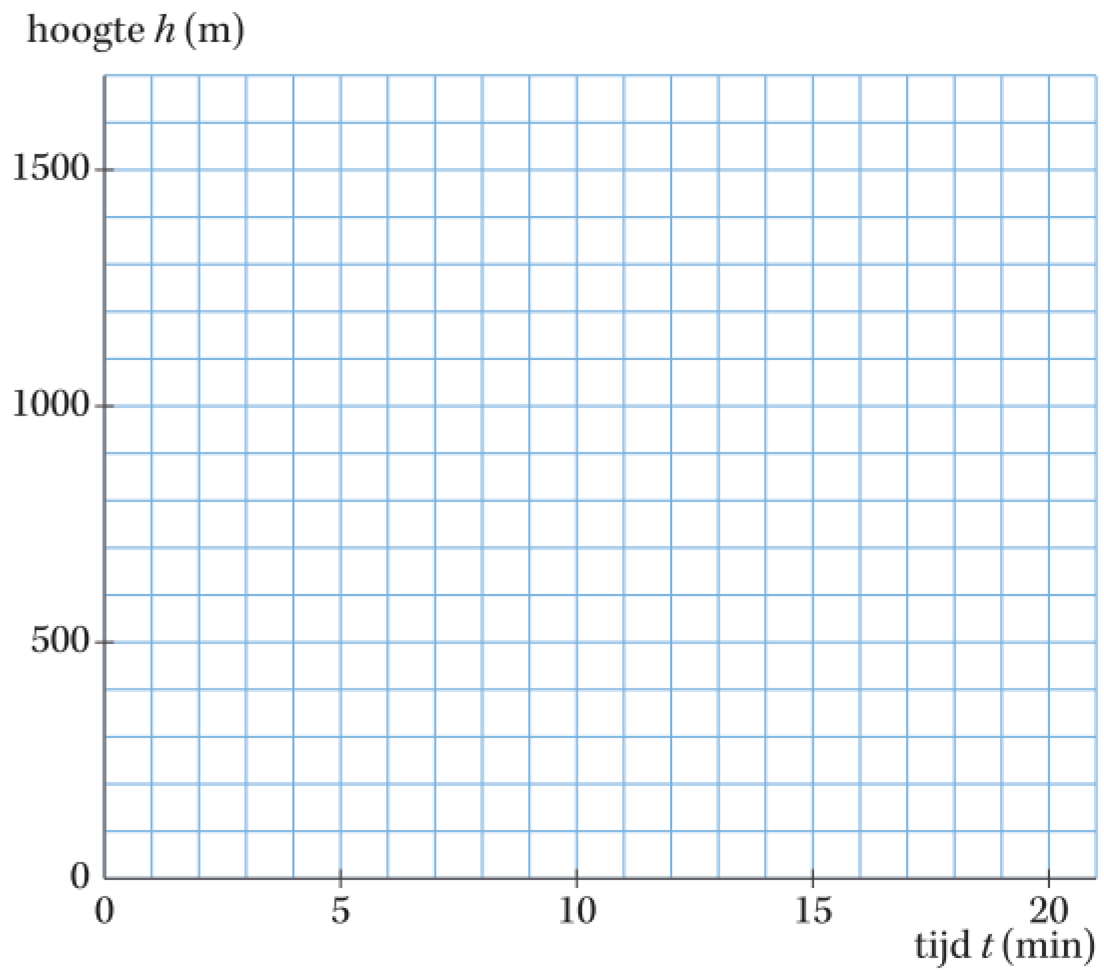
1 Vul de tabel in.

tijd t (min)	0	5	10	15	20
hoogte h_1 van de zeppelin (m)	....	....	....	....	....
hoogte h_2 van de deltavlieger (m)	....	....	....	....	....

2 Met welke formules kunnen we de hoogte van de zeppelin en van de deltavlieger berekenen?

zeppelin: h_1 = ... deltavlieger: h_2 = ...

3 Teken de twee grafieken.





4 Wie vliegt het hoogst na 5 minuten? ....

5 Wat is het hoogteverschil tussen de zeppelin en de deltavlieger na 15 minuten?

....

6 Wanneer vliegen de zeppelin en de deltavlieger even hoog?

....

....

....

....

7 Hoe hoog vliegen ze dan?

....

8 Wat is het hoogteverschil na 12 minuten?

....

....

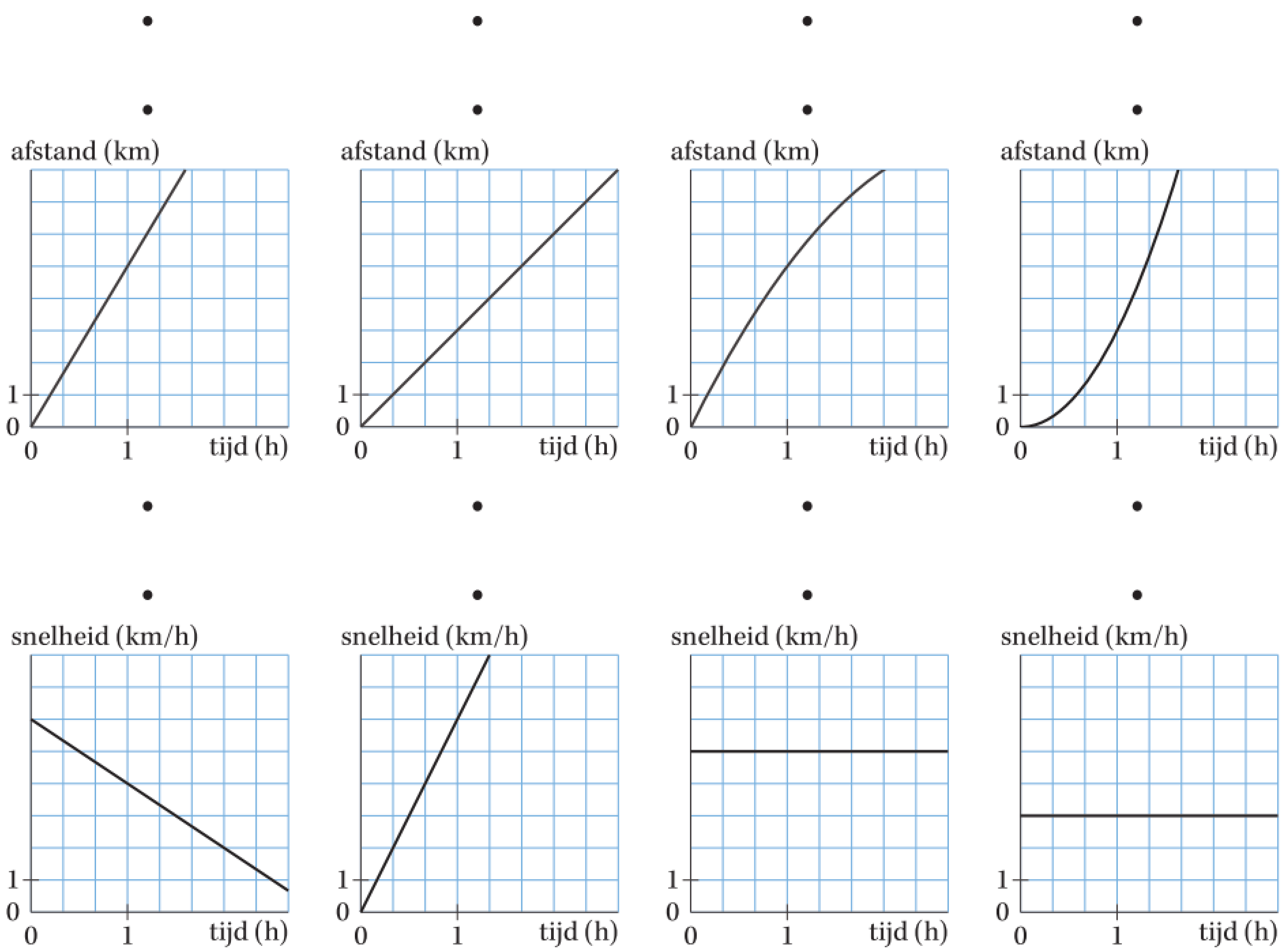
....

4

De trefwoorden en grafieken beschrijven de wandelwijze van vier leden van de wandelclub Delta-stap.

1 Verbind elk trefwoord met de bijbehorende tijd-afstandgrafiek en verbind vervolgens elke tijd-afstandgrafiek met de bijbehorende tijd-snelheidgrafiek.

langzaam versneld snel vertraagd



2 Bij welke wandelwijze kunnen we geen lineair verband ontdekken tussen tijd en afstand?

....

3 Bij welke wandelwijze is er geen lineair verband tussen tijd en snelheid?

....

5

Een stalagmiet is 1,875 m en groeit jaarlijks met 2,5 mm.

1 Stel een formule op om de hoogte h van de stalagmiet na t jaar te berekenen.

....

2 Na hoeveel jaar is de druipsteen 5 m hoog?

....

....

....

....



6

Ward is geopereerd en krijgt enkele dagen antibiotica toegediend via een infuus. De infuuszak heeft een inhoud van 0,5 liter en de infuuspomp staat ingesteld op één druppel per seconde. Twintig druppels komen overeen met 1 milliliter.

1 Stel een formule op om de resterende inhoud V in ml van de infuuszak na t seconden te bepalen.

....

....

2 Na hoeveel minuten moet de infuuszak vervangen worden?

7

Papier met een dikte van 0,12 mm wordt op een rol gewikkeld. De rol heeft een diameter van 4 cm.

1 Stel een formule op om de diameter d van de rol papier met n papierlagen te kunnen berekenen.

2 Bepaal de diameter als de rol 1000 lagen papier bevat.

3 Hoeveel lagen telt een rol papier die een diameter van 1,75 m heeft?

8

Een 70 cm hoge dennenboom groeit de volgende 10 jaar ongeveer 15 cm per jaar.

1 Stel een formule op om de hoogte h van de dennenboom na t tijdseenheden te berekenen als we h en t uitdrukken in de volgende eenheden.

a Tijd in jaar en hoogte in centimeter.

b Tijd in jaar en hoogte in meter.

c Tijd in maanden en hoogte in centimeter.

....

d Tijd in maanden en hoogte in meter.

....

2 Hoe hoog is de dennenboom na 8 maanden?

....

3 Na hoeveel jaar is de boom 2 meter hoog?

....

....

....

....

....

....

Lineaire en exponentiële groei

9 **Instap**

In de huurovereenkomst van een appartement lezen we:

> De huurprijs van het appartement bedraagt 500 euro per maand.
> De maandelijkse huurprijs zal jaarlijks verhogen met 25 euro of met 5 %. (*)
> (*) Schrappen wat niet past.



We vergelijken de twee mogelijkheden.

1 Bereken de maandelijkse huurprijs bij een jaarlijkse verhoging met 25 euro.

aantal jaar	maandelijkse huurprijs
0	....
1	....
2	....
3	....
4	....
5	....

2 Hoeveel bedraagt de maandelijkse huurprijs na 10 jaar bij een jaarlijkse verhoging met 25 euro?

....

Stel een formule op om de huurprijs p na n jaar te berekenen.

....

3 Bereken de maandelijkse huurprijs na 1 jaar bij een verhoging van 5 %.

....

Met welke factor moeten we de huurprijs vermenigvuldigen om de huurprijs van het volgende jaar te kennen?

....

....

4 Bereken de maandelijkse huurprijs bij een jaarlijkse verhoging met 5 %.
Rond af op 2 decimalen.

aantal jaar	maandelijkse huurprijs
0	....
1	....
2	....
3	....
4	....
5	....

5 Hoeveel bedraagt de maandelijkse huurprijs na 10 jaar bij een jaarlijkse verhoging met 5 %?

....

....

Stel een formule op om de huurprijs p na n jaar te berekenen.

....

6 Vergelijk beide tabellen. Welke mogelijkheid is het voordeligst voor de huurder?

....

Lineaire en exponentiële groei

Groeiverschijnselen komen veel voor: de aangroei van geld dat we op een spaarboekje zetten, het vermenigvuldigen van bacteriën in een kweekschaal, het afnemen van de druk in een fietsband, ... In sommige gevallen kunnen we een groeiverschijnsel beschrijven met een wiskundig model.

- Als de hoeveelheid met eenzelfde getal toeneemt of afneemt per tijdseenheid, dan spreken we van een **lineaire groei**.
- Als de hoeveelheid met eenzelfde getal vermenigvuldigd wordt per tijdseenheid, dan spreken we van een **exponentiële groei**.

Lineaire groei

+1 +1 +1

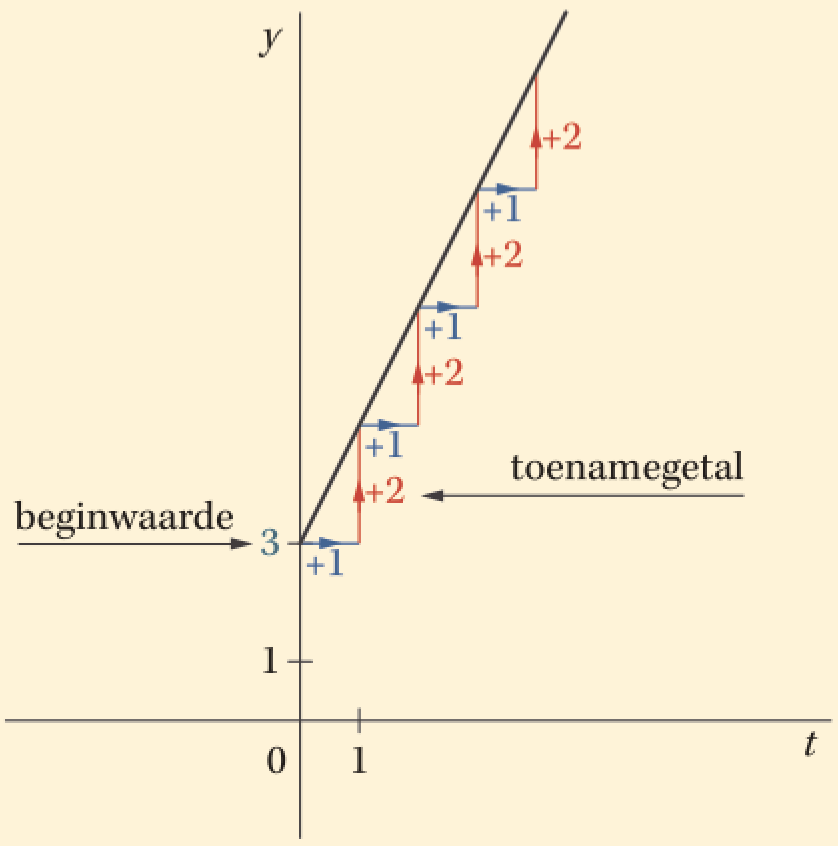
tijd t	0	1	2	3
hoeveelheid y	3	5	7	9

+2 +2 +2

Bij een lineaire groei beschrijven we de hoeveelheid y met de functie $y = 3 + 2t$.

- De term 3 is de functiewaarde voor $t = 0$ en noemen we de **beginwaarde**.
- De coëfficiënt 2 is het **toenamegetal** per tijdseenheid.

De grafiek van $y = 3 + 2t$ is een **rechte**.



Exponentiële groei

+1 +1 +1

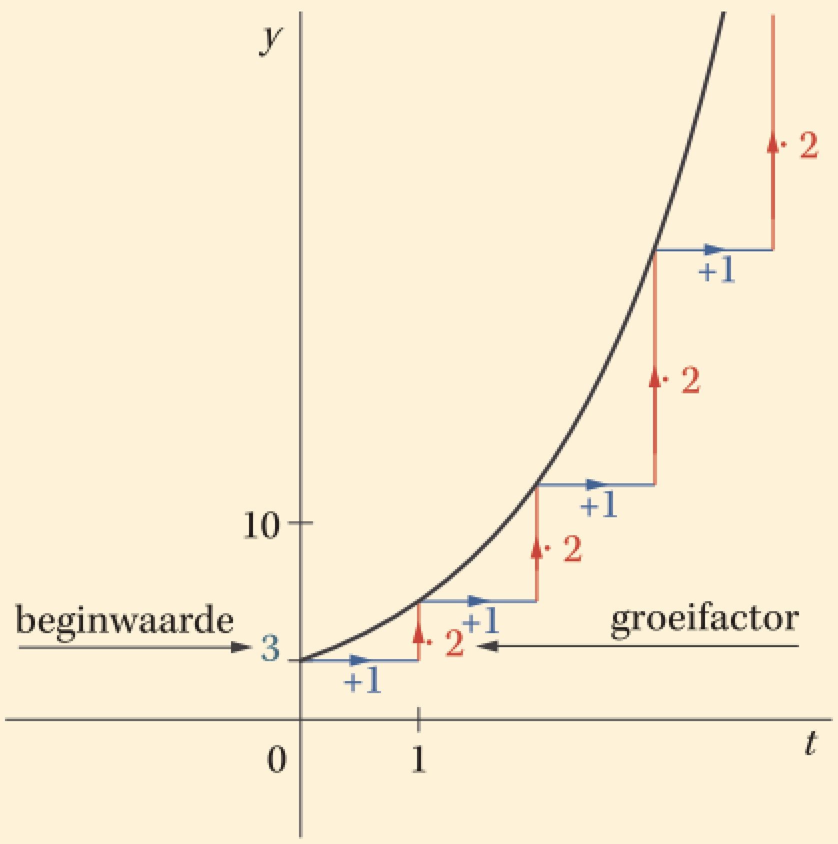
tijd t	0	1	2	3
hoeveelheid y	3	6	12	24

· 2 · 2 · 2

Bij een exponentiële groei beschrijven we de hoeveelheid y met de functie $y = 3 \cdot 2^t$.

- De coëfficiënt 3 is de functiewaarde voor $t = 0$ en noemen we de **beginwaarde**.
- Het grondtal 2 is de **groeifactor** per tijdseenheid.

De grafiek van $y = 3 \cdot 2^t$ is een **exponentiële kromme**.



10

De formule beschrijft een lineaire of een exponentiële groei. Bepaal de beginwaarde en het toenamegetal of de groeifactor per tijdseenheid (schrappen wat niet past). Vul de tabel in.

1 $y = 4 + 2t$ beginwaarde: .... toenamegetal/groeifactor: ....

t	0	1	2	3	4
y	....	....	....	....	....

2 $y = 100 \cdot 1{,}5^t$ beginwaarde: .... toenamegetal/groeifactor: ....

t	0	1	2	3	4
y	....	....	....	....	....

3 $y = 50 - 2{,}5t$ beginwaarde: .... toenamegetal/groeifactor: ....

t	0	1	2	3	4
y	....	....	....	....	....

4 $y = 300 \cdot 0{,}2^t$ beginwaarde: .... toenamegetal/groeifactor: ....

t	0	1	2	3	4
y	....	....	....	....	....

11

De tabel behoort bij een lineaire of een exponentiële groei. Bepaal de beginwaarde, het toenamegetal of de groeifactor per tijdseenheid (schrappen wat niet past) en de formule. Vul de tabel aan.

1

t	0	1	2	3	4
y	6	18	30	....	....

beginwaarde: .... toenamegetal/groeifactor: .... formule: ....

2

t	0	1	2	3	4
y	0,5	2	8	....	....

beginwaarde: .... toenamegetal/groeifactor: .... formule: ....

3

t	0	1	2	3	4
y	0,4	0,6	0,9	....	....

beginwaarde: .... toenamegetal/groeifactor: .... formule: ....

4

t	0	3	7	10	12
y	1	13	29	....	....

beginwaarde: .... toenamegetal/groeifactor: .... formule: ....

12

De levensechte situatie kunnen we beschrijven met een lineaire of een exponentiële groei. Zet een vinkje in het vakje bij de passende benaming en stel een formule op.

1 Een olietanker bevat 50 000 liter olie. Elke minuut wordt er 20 000 liter olie ingepompt.

lineair ☐ exponentieel ☐ formule: ....

V: volume in liter
t: tijd in minuten

2 Een computer van 1500 euro daalt elk jaar met de helft in waarde.

lineair ☐ exponentieel ☐ formule: ....

w: waarde in euro
t: tijd in jaar

3 Een beker wordt gevuld, het waterniveau stijgt met 3 cm per seconde.

lineair ☐ exponentieel ☐ formule: ....

h: hoogte in centimeter
t: tijd in seconden

4 Kim verdient 15 600 euro per jaar. Elk jaar krijgt ze een loonsverhoging van 2 %.

lineair ☐ exponentieel ☐ formule: ....

l: jaarlijks loon in euro
t: tijd in jaar

5 Een beursaandeel van 500 euro stijgt maandelijks met $\frac{1}{100}$ van haar beginwaarde.

lineair ☐ exponentieel ☐ formule: ....

w: waarde in euro
t: tijd in maanden

Exponentiële functies

Een functie waarvan we het voorschrift kunnen schrijven in de vorm

$$f(x) = b \cdot a^x$$

noemen we een **exponentiële functie**.

Het **grondtal** a is groter dan nul, maar verschillend van één.

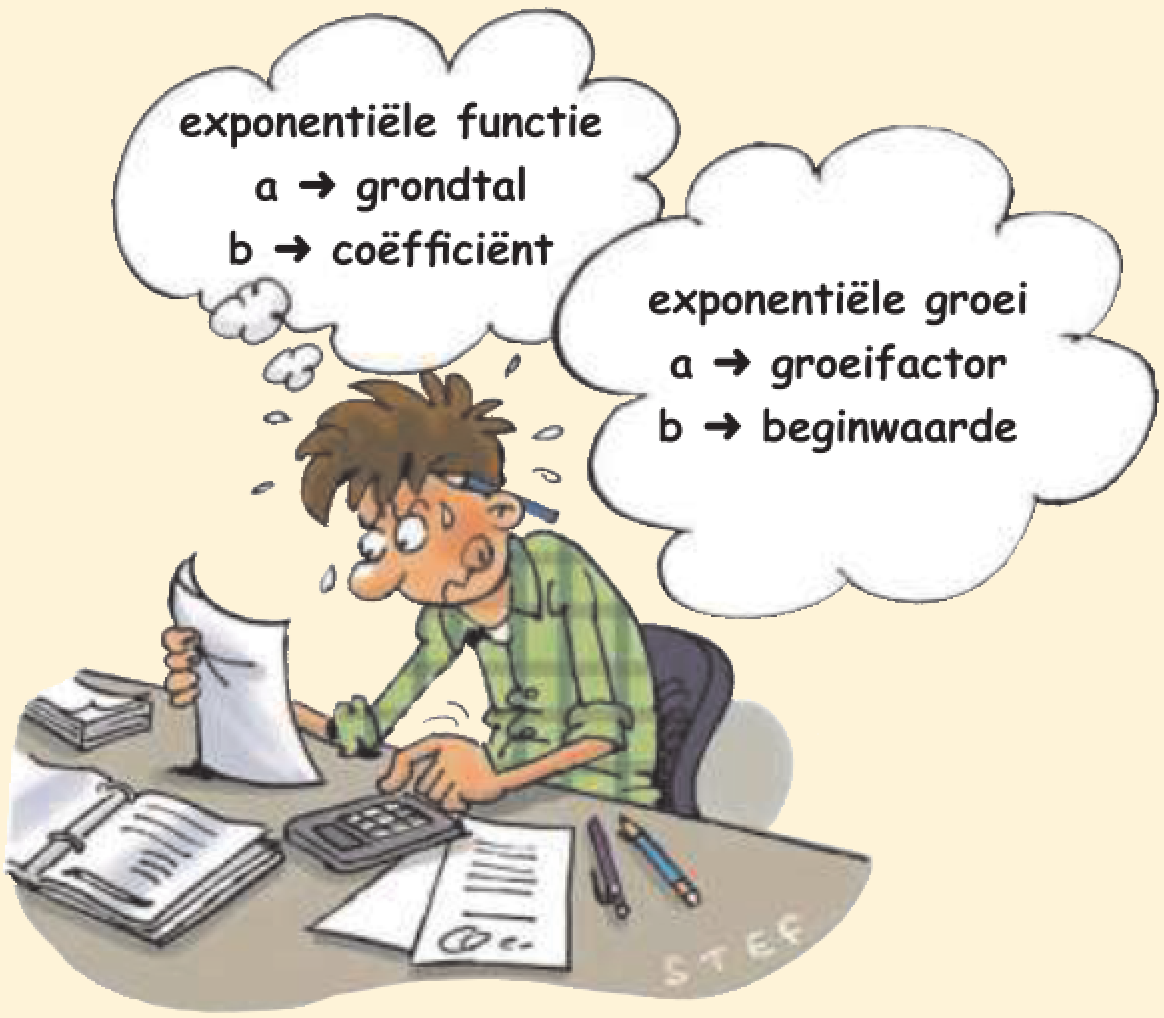
De **coëfficiënt** b is verschillend van nul.

Merk op:

Bij een exponentiële groei gebruiken we meestal de variabele t.

$$f(t) = b \cdot a^t$$

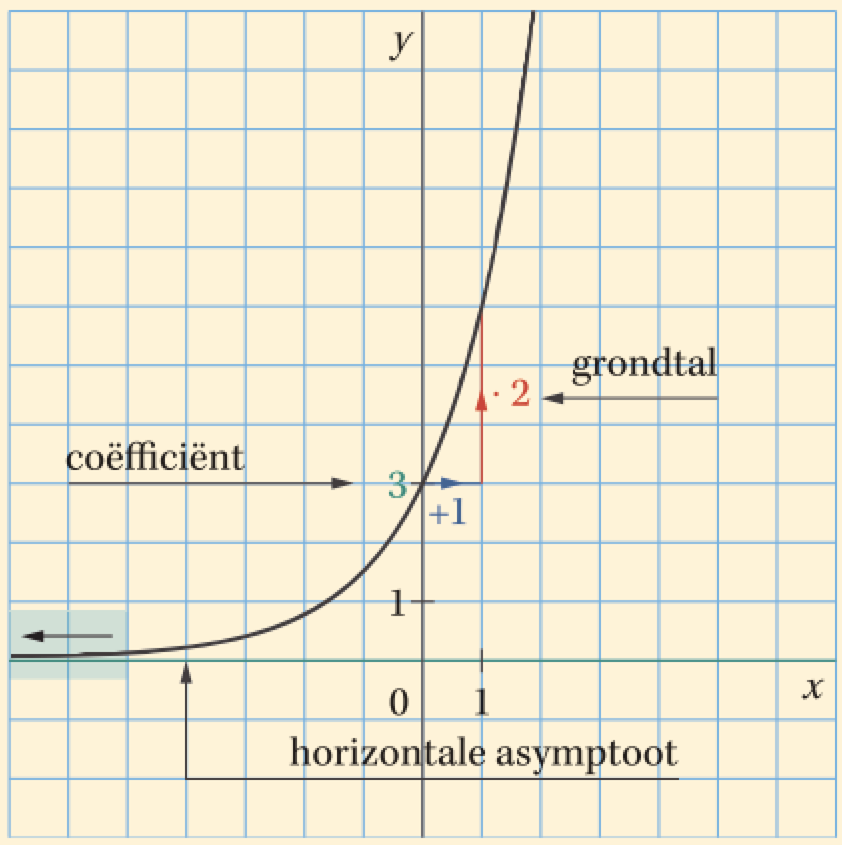
In dit geval noemen we a ook de **groeifactor** en b de **beginwaarde**.



Voorbeeld

We onderzoeken de exponentiële functie $f(x) = 3 \cdot 2^x$.

Het functievoorschrift is van de vorm $f(x) = b \cdot a^x$ met grondtal $a = 2$ en coëfficiënt $b = 3$.



Van de functie $f(x) = 3 \cdot 2^x$ kunnen we in elk reëel getal de functiewaarde berekenen: **dom $f = \mathbb{R}$**.

Elke functiewaarde is groter dan nul: **ber $f = \mathbb{R}_0^+$**.

De coëfficiënt 3 in het functievoorschrift bepaalt het snijpunt (0, 3) van de grafiek met de y-as.

We berekenen de functiewaarden van $f(x) = 3 \cdot 2^x$ voor steeds kleiner wordende originelen.

x	-4	-10	-20	...	$\rightarrow$	$-\infty$
$f(x)$	0,1875...	0,0029...	0,0000028...	...	$\rightarrow$	0

We stellen vast: als x nadert tot $-\infty$, dan nadert $f(x)$ tot nul.

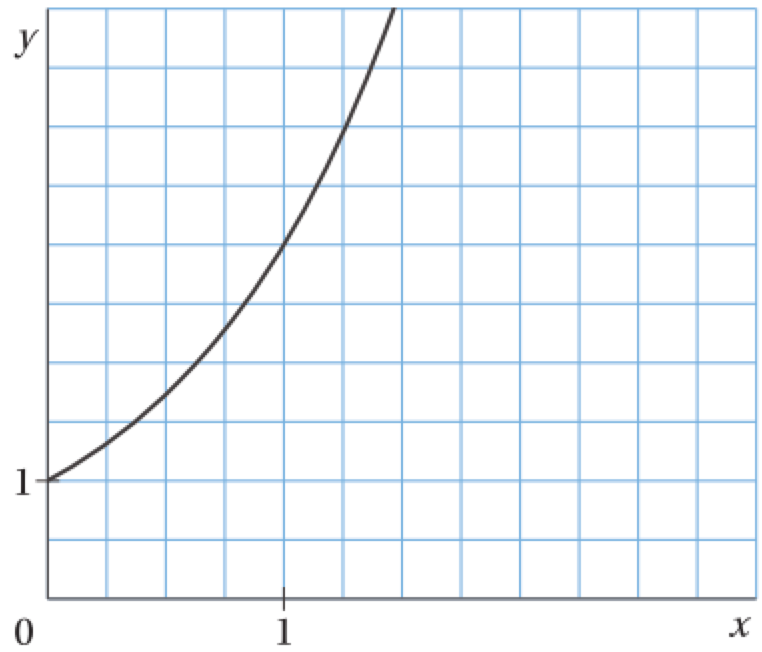
Dit betekent dat de grafiek dichter gaat aanleunen tegen de x-as maar geen snijpunt heeft met de x-as.

We noemen de ***x*-as** de **horizontale asymptoot** van de grafiek van f.

13

De grafiek behoort bij een exponentiële functie met voorschrift $f(x) = b \cdot a^x$. Bepaal de coëfficiënt, het grondtal en het bijbehorende functievoorschrift.

1

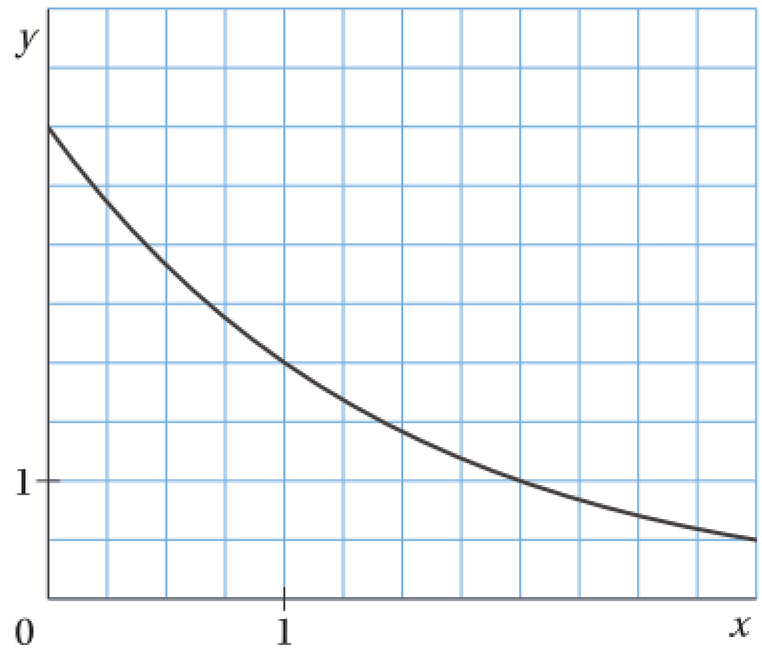


coëfficiënt: ....

grondtal: ....

functievoorschrift: ....

2

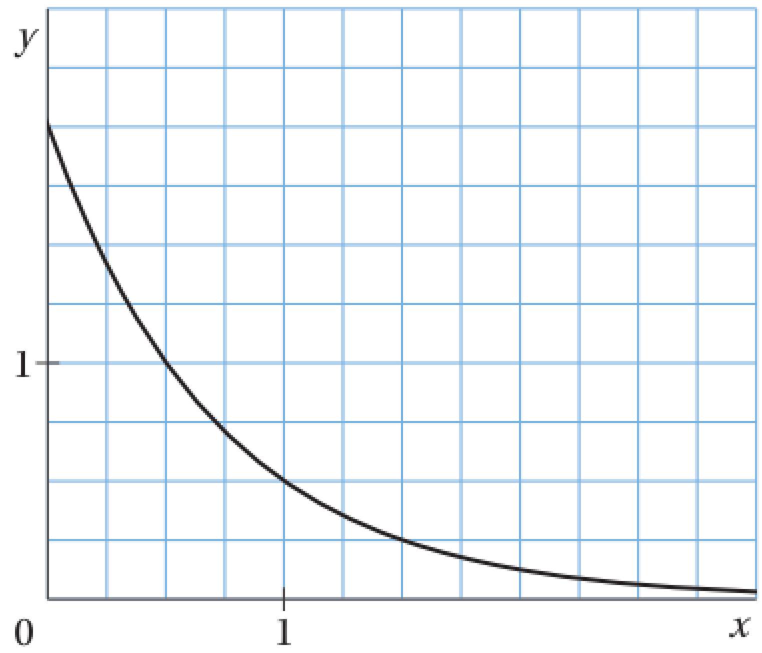


coëfficiënt: ....

grondtal: ....

functievoorschrift: ....

3

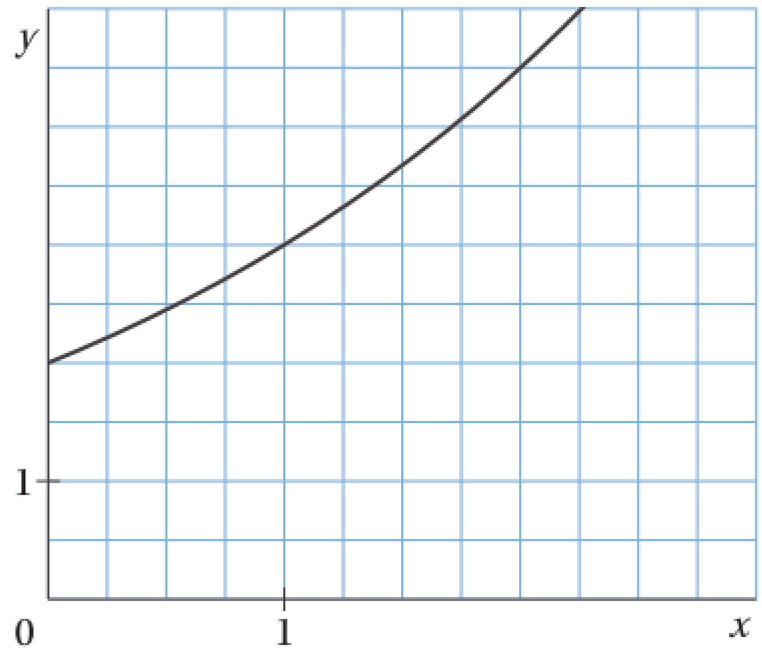


coëfficiënt: ....

grondtal: ....

functievoorschrift: ....

4



coëfficiënt: ....

grondtal: ....

functievoorschrift: ....

14

Een bosbrand breidt zeer snel uit. De brandweer stelt bij de eerste luchtopname vast dat ongeveer 3 are bos in brand staat. Uit de volgende opnamen blijkt dat de verbrande oppervlakte elk uur verdubbelt.



1 Wat is de beginwaarde van de verbrande oppervlakte? ....

2 Wat is de groeifactor per uur waarmee deze oppervlakte toeneemt? ....

3 Stel een formule op waarmee we de verbrande oppervlakte A in are kunnen berekenen na t uren.

....

4 Bereken de verbrande oppervlakte na 12 uren.

....

....

5 Hoeveel km^2 zijn dat?

....

....

....

6 Bereken de verbrande oppervlakte in km^2 na 13 uren.

....

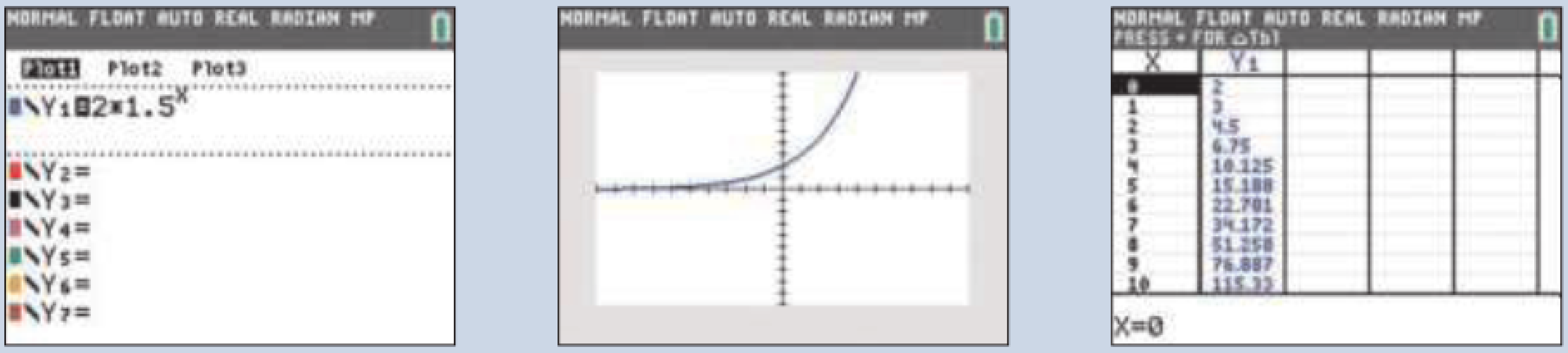
....

Grafieken en tabellen van exponentiële functies

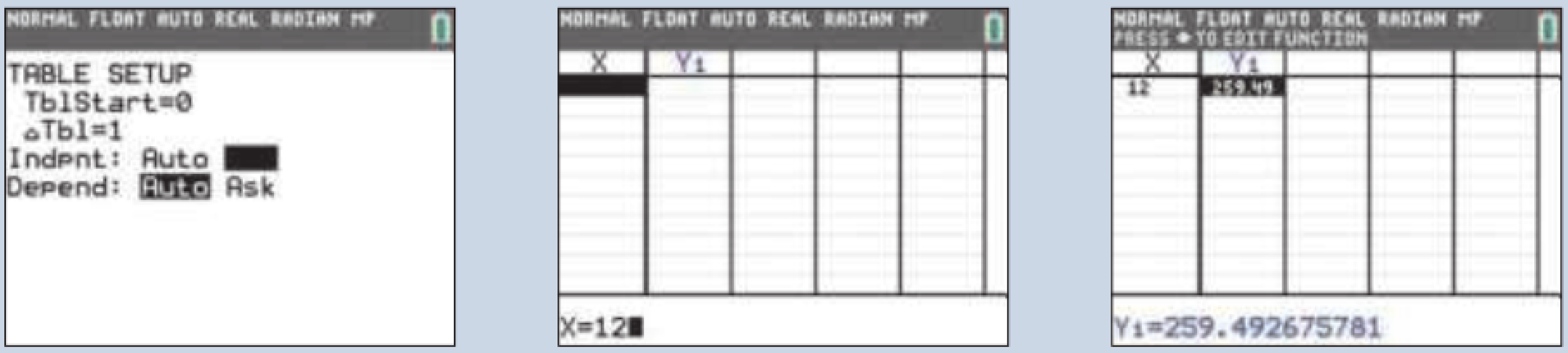
We tekenen de grafiek van de exponentiële functie $f(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$, stellen een tabel op en berekenen de functiewaarde $f(12)$.

TEXAS INSTRUMENTS

We voeren de functie $f(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$ in met de toets Y=. Daarna tonen we de grafiek in het standaardvenster. Om een tabel op te stellen, voeren we in het scherm TABLE SETUP de tabelvariabelen in: startwaarde 0 en stapgrootte 1. De tabel geven we weer met de toets TABLE.



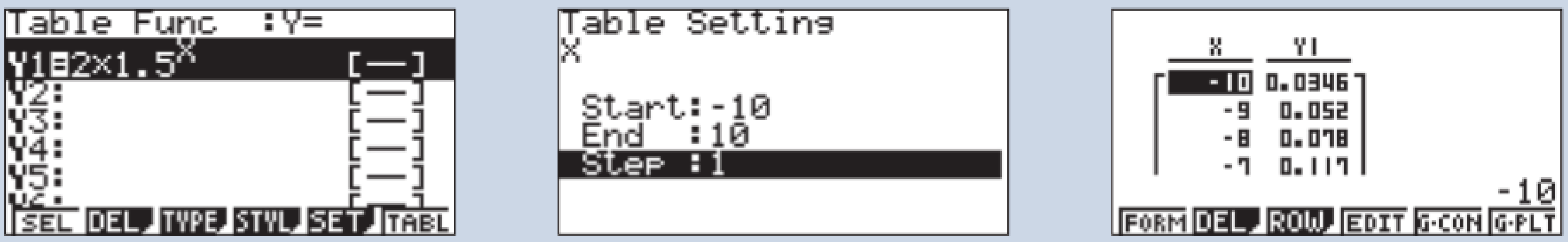
De functiewaarde $f(12)$ kunnen we aflezen in de tabel of ook rechtstreeks berekenen. Hiervoor vervangen we in het scherm TABLE SET de instructie Auto bij Indpnt (onafhankelijke variabele) door de instructie Ask. We voeren de x-waarde 12 in. De functiewaarde 259,49 verschijnt in de kolom Y1.

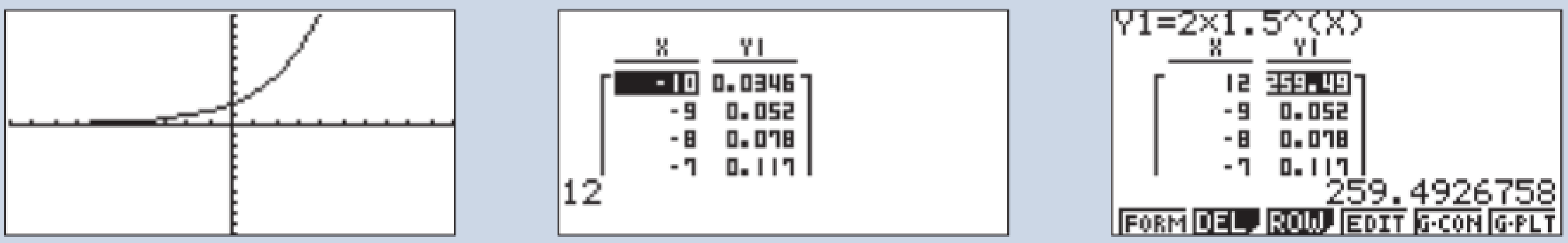


CASIO

In het menu TABLE voeren we de functie $f(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$ in. We stellen de tabelvariabelen in met de toets F5 (SET). In het scherm Table Setting kiezen we startwaarde –10, eindwaarde 10 en stapgrootte 1. De tabel geven we weer met de toets F6 (TABL). De grafiek kunnen we oproepen met de toets F5 (G·CON).

Om de functiewaarde $f(12)$ te berekenen, roepen we opnieuw de tabel op met de functietoets F6 (G ↔ T). We vervangen een willekeurige x-waarde door 12. De functiewaarde 259,49 verschijnt in de kolom Y1.





15

Op een braakliggend terrein telt de gezondheidsinspectie 120 ratten. Elk jaar neemt het aantal ratten toe met 70 %.

Met de formule $n = 120 \cdot 1{,}7^t$ kunnen we het aantal ratten n op het terrein na t jaar berekenen.



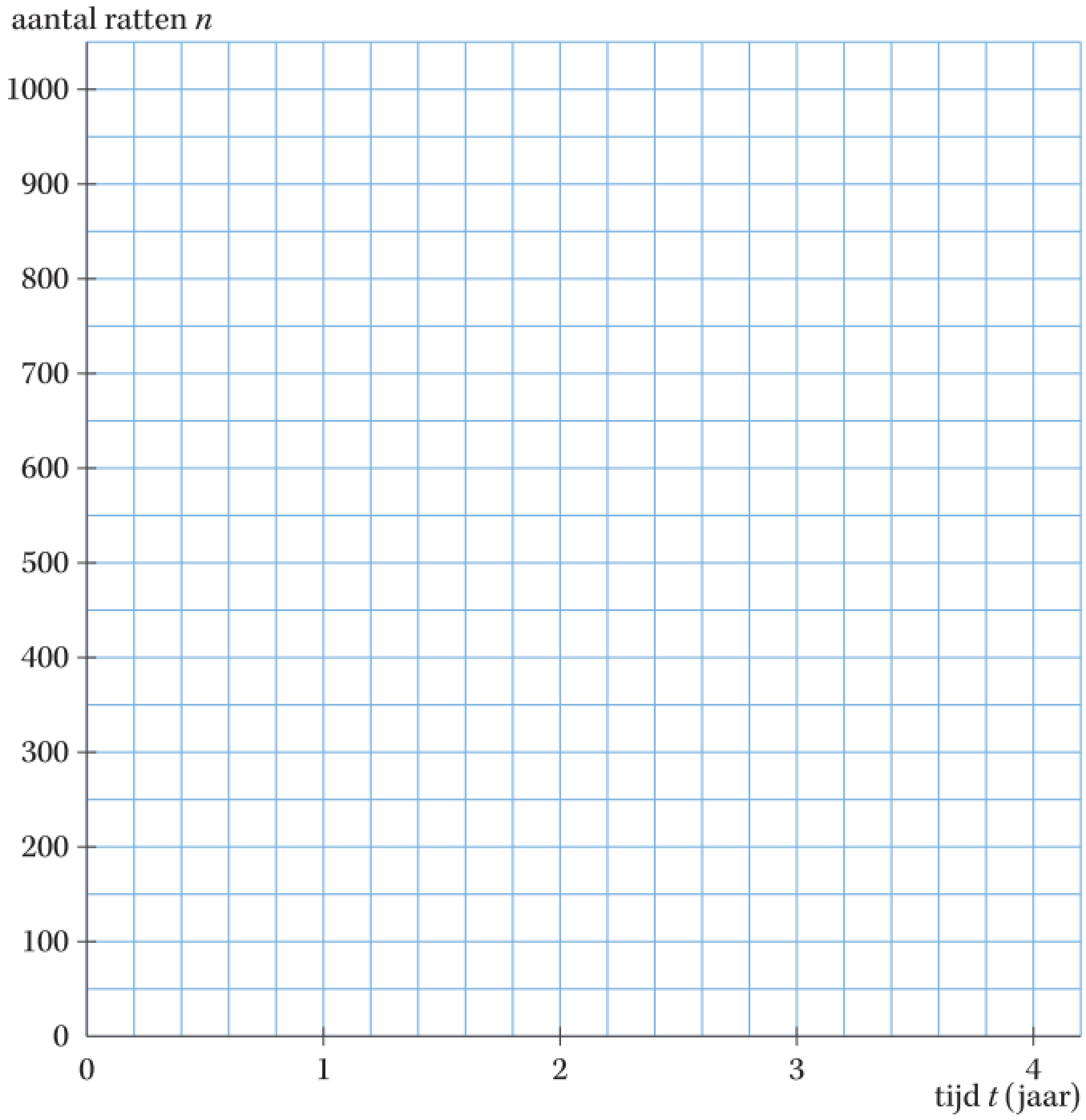
1 Vul de tabel in.

tijd t (jaar)	0	1	2	3	4
aantal ratten n	....	....	....	....	....

2 Wat is de groeifactor van deze exponentiële functie? ....

3 Wat is de beginwaarde? ....

4 Teken de grafiek van deze functie.



5 Hoeveel ratten waren er één jaar voor de eerste telling?

....

6 Stel dat er niets ondernomen wordt tegen deze rattenplaag, hoeveel ratten zijn er dan over 10 jaar?

....

16

De grafiek van de functie $f(x) = a^x$ gaat door het punt P. Bepaal het grondtal van de exponentiële functie.

1 $P(1, 4)$

2 $P(2, 8)$

3 $P(3, 125)$

4 $P(-1, 5)$

5 $P\left(-1, \frac{1}{3}\right)$

6 $P(-3; 0{,}027)$

17

Het schaakspel is volgens een legende uitgevonden in India. Een sjah, de ontwerper van het ‘schaak’-spel, mocht van de koning een wens doen die zou ingevolgd worden. Hij wenste op het eerste veld van zijn schaakbord 1 graankorrel, op het tweede veld 2 graankorrels, op het derde veld 4 graankorrels en op elk van de volgende velden telkens het dubbele aantal graankorrels van het voorgaande veld.

De koning dacht dat het een redelijke wens was en zond snel een onderdaan weg om een zak graan te halen…



1 Bepaal de factor waarmee het aantal graankorrels aangroeit. ....

2 Stel een formule op om het aantal graankorrels n te berekenen op het veld met rangnummer i.

....

....

3 Bereken het aantal graankorrels op veld 8, veld 16, veld 32 en veld 64.

Veld 8: ....

Veld 16: ....

Veld 32: ....

Veld 64: ....

Exponentiële vergelijkingen

Een vergelijking waarbij de onbekende x in de exponent voorkomt, noemen we een **exponentiële vergelijking**.

Bij het onderzoek van exponentiële functies is het handig als we exponentiële vergelijkingen kunnen oplossen.

Exponentiële vergelijkingen oplossen met gelijkstelling van exponenten

Als we beide leden van een vergelijking kunnen herleiden naar machten met eenzelfde grondtal, dan kunnen we de exponenten aan elkaar gelijkstellen.

Voorbeelden

$3^{2x} = 9$

$3^{2x} = 3^2$

$2x = 2$ **exponenten gelijkstellen**

$x = 1$

$10^{x+1} = 0{,}001$

$10^{x+1} = 10^{-3}$

$x + 1 = -3$ — **exponenten gelijkstellen**

$x = -4$

Niet alle exponentiële vergelijkingen kunnen we met deze methode oplossen.

Exponentiële vergelijkingen oplossen met logaritmen

Een exponentiële vergelijking waarvan beide leden niet herleidbaar zijn naar machten met eenzelfde grondtal, kunnen we oplossen met logaritmen.

Voorbeelden

$7^{3x} = 18$

$3x = {}^{7}\log 18$ — ***a*-logaritme van een getal**

$x = \frac{1}{3} \cdot {}^{7}\log 18$

$x = 0{,}495...$

$7^{x} = 5^{x+1}$

$\log 7^{x} = \log 5^{x+1}$ — **logaritme nemen van beide leden**

$x \cdot \log 7 = (x+1) \cdot \log 5$ — **rekenregel voor logaritme van een macht**

$x \cdot \log 7 = x \cdot \log 5 + \log 5$

$x \cdot \log 7 - x \cdot \log 5 = \log 5$

$x \cdot (\log 7 - \log 5) = \log 5$

$x = \frac{\log 5}{\log 7 - \log 5}$

$x = 4{,}783...$

18

Los de exponentiële vergelijking op met gelijkstelling van exponenten.

1 $3^{x} = 27$

....

....

....

2 $2^{3x} = 64$

....

....

....

3 $7^{4x} = 49$

....

....

....

4 $2^{x+1} = 16$

....

....

....

5 $9^{3x} = 1$

....

....

....

6 $6^{x} = \frac{1}{6}$

....

....

....

7 $5^{x-1} = 25$

....

....

....

8 $2^{x} = \frac{1}{8}$

....

....

....

9 $8^{5x} = 8$

....

....

....

10 $7^{x-1} = \sqrt{7}$

....

....

....

11 $4^{2x-3} = 4$

....

....

....

....

12 $6^{x^2+1} = 6$

....

....

....

....

13 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$

14 $10^{5x-1} = 0,1$

15 $9^x = 3$

16 $4^{-x} = 0,125$

19

Los de exponentiële vergelijking op met gelijkstelling van exponenten.

1 $10^{-x} = 0,01$

2 $5^x = \frac{1}{125}$

3 $3^{x+1} = 9^{x-2}$

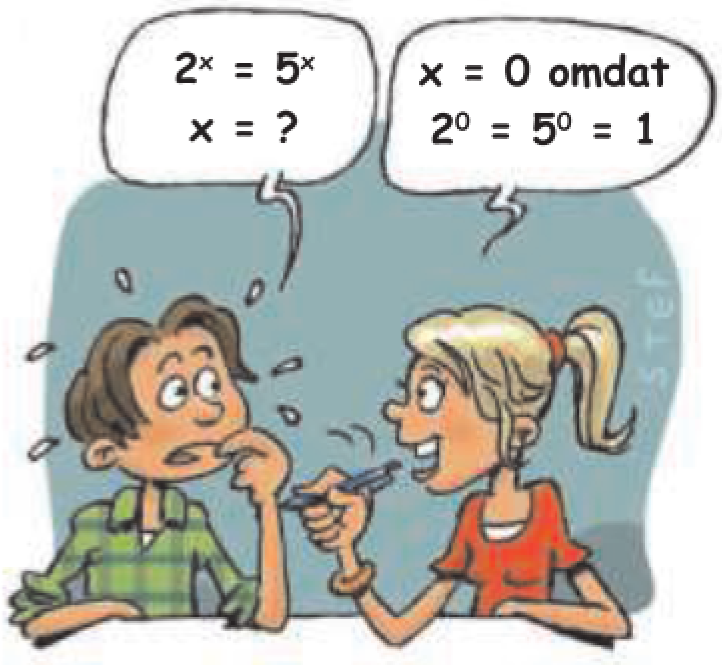
4 $25^{2x} = 5^{x+1}$

5 $4^{x+2} = 8^{x}$

6 $2^{x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}x}$

20

Los de exponentiële vergelijking op.



1 $3^{x-1} = 7^{x-1}$

2 $25 \cdot 2^{x} - 4 \cdot 5^{x} = 0$

3 $3 \cdot 2^{x+1} - 16 \cdot 3^{x-2} = 0$

21

Hoeveel gehele waarden van x voldoen aan de vergelijking $3^{x+7} \cdot 9^{x+4} = 27^{x+5}$?

22

Los de exponentiële vergelijking op met logaritmen. Rond af op 2 decimalen.

1 $3^x = 37$

2 $2^x = 27$

3 $10^x = 50$

4 $7^x = 343$

5 $2 \cdot 1{,}5^x = 5$

6 $3 \cdot 0{,}8^x = 12$

7 $5^x = 0$

8 $4^x = -16$

23

Los de exponentiële vergelijking op met logaritmen. Rond af op 2 decimalen.

1 $2^{2x-4} = 5$

2 $7^{3x+1} = 11$

3 $2^{4x+1} = 6$

4 $5^{4-x} = 10$

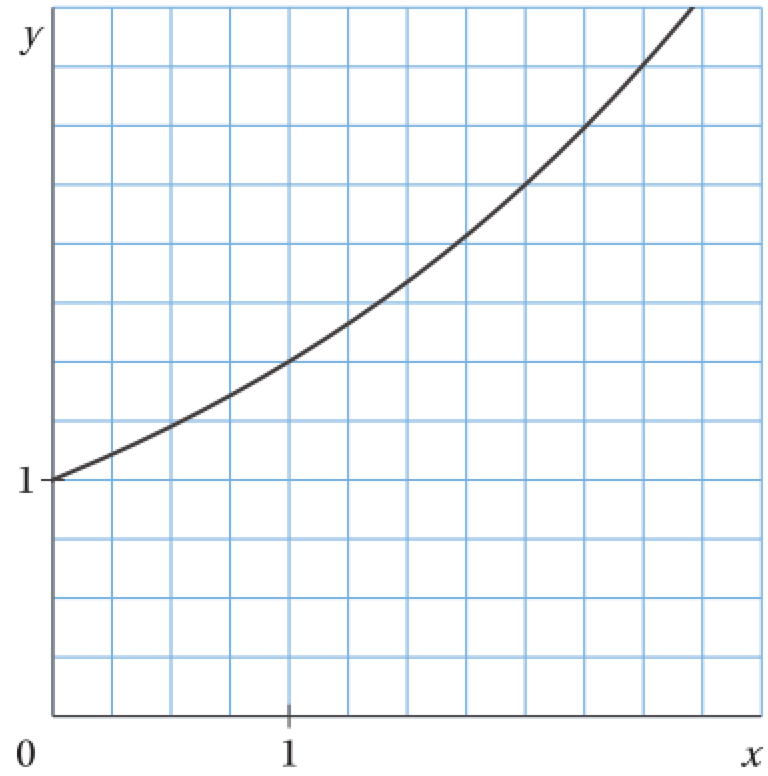
5 $3^{4x+5} = 5^{x-1}$

6 $6^{4x-3} = 9^{2x+5}$

24

De grafiek behoort bij een exponentiële functie met voorschrift $f(x) = b \cdot a^x$. Bepaal het functievoorschrift en bereken de x-waarde waarvoor $f(x) = 2$. Rond af op 2 decimalen.

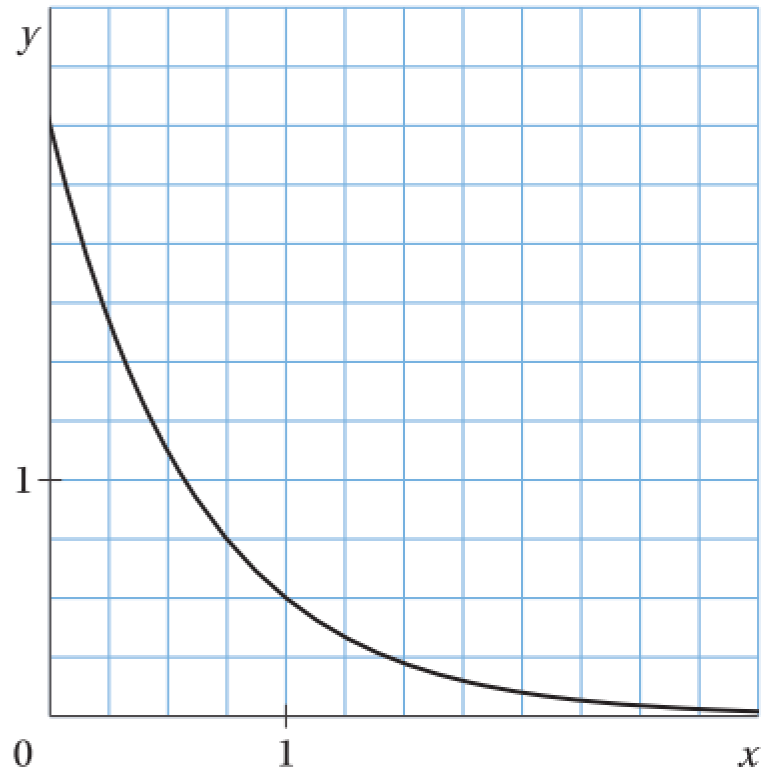
1



functievoorschrift:

x-waarde:

2



functievoorschrift:

x-waarde:

25

In mei 2011 stierven in Europa tientallen mensen aan de EHEC-bacterie. Deze bacterie veroorzaakt ernstige diarree en mogelijk ook nierfalen. Ze kan via besmet voedsel worden overgedragen, vooral via rauwe groenten en slecht doorbakken vlees. Van deze bacterie weten we dat ze zich bij een lichaamstemperatuur van 38 °C elke 20 minuten verdubbelt. Met de formule $n = 10 \cdot 8^t$ kunnen we het aantal bacteriën n na t uur berekenen.





1 Wat is het aantal bacteriën op de gegeven tijdstippen? Vul de tabel aan.

tijd t (uur)	0	1	2	3
aantal bacteriën n	10	....	....	....

2 We spreken van een infectie als er 1 miljoen bacteriën geteld worden. Hoelang na de besmetting ($t = 0$) is er sprake van een infectie?

....

....

....

....

....

....

3 De dokter stelt voor om met medicatie te starten op het ogenblik dat er 3 miljoen bacteriën zijn. Hoeveel tijd is er dan verlopen sinds de besmetting?

....

....

....

....

....

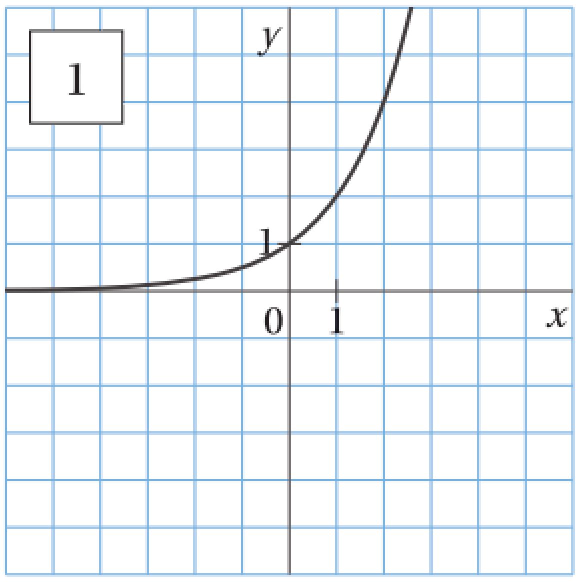
....

▶ Grafieken met voorschrift $f(x) = b \cdot a^x$

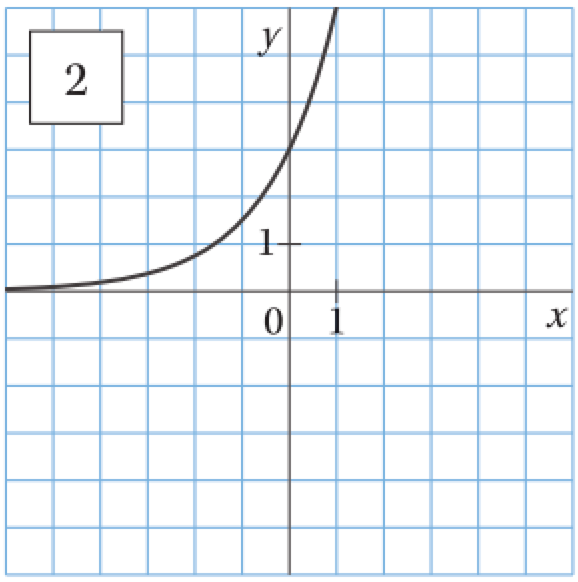
26 Instap

Van vier exponentiële functies zijn de grafiek en de tabel gegeven. Om te achterhalen welke tabel bij welke grafiek behoort, doen wij beroep op je wiskundekennis van exponentiële functies.

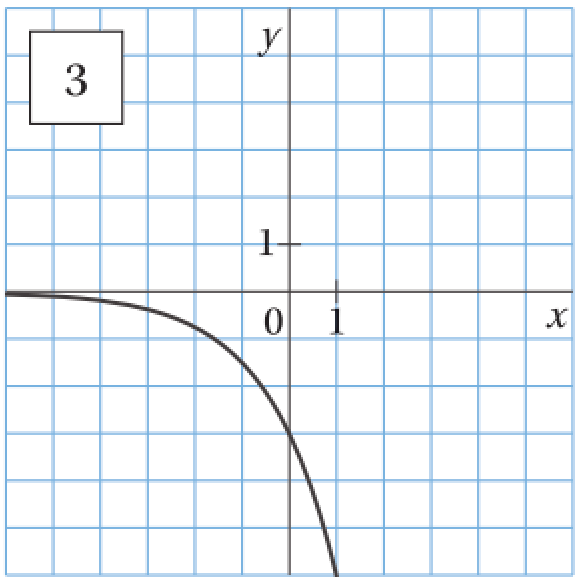
x	−2	−1	0	1
$f(x)$	0,75	1,5	3	6



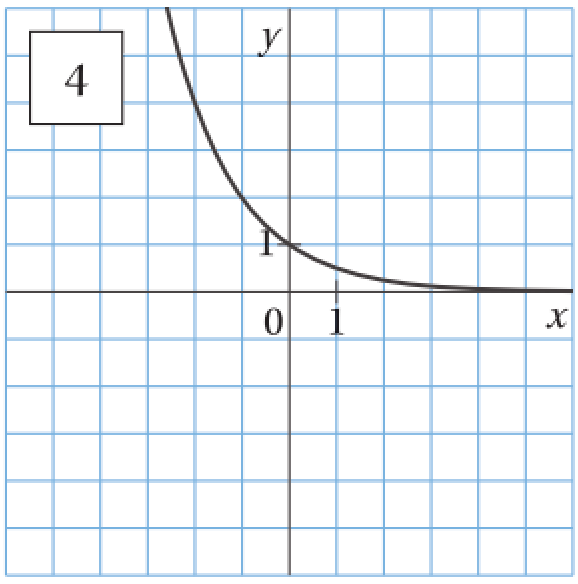
x	−2	−1	0	1
$g(x)$	0,25	0,5	1	2



x	−2	−1	0	1
$h(x)$	4	2	1	0,5



x	−2	−1	0	1
$i(x)$	−0,75	−1,5	−3	−6



1 Vervolledig aan de hand van de tabellen elk functievoorschrift met de passende letter en vul het nummer van de bijbehorende grafiek in.

functievoorschrift	......$(x) = 0{,}5^x$	......$(x) = 2^x$	......$(x) = 3 \cdot 2^x$	......$(x) = -3 \cdot 2^x$
grafiek	....	....	....	....

2 Welke grafieken zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de x-as? ....

Waarin verschillen hun voorschriften van elkaar?

....

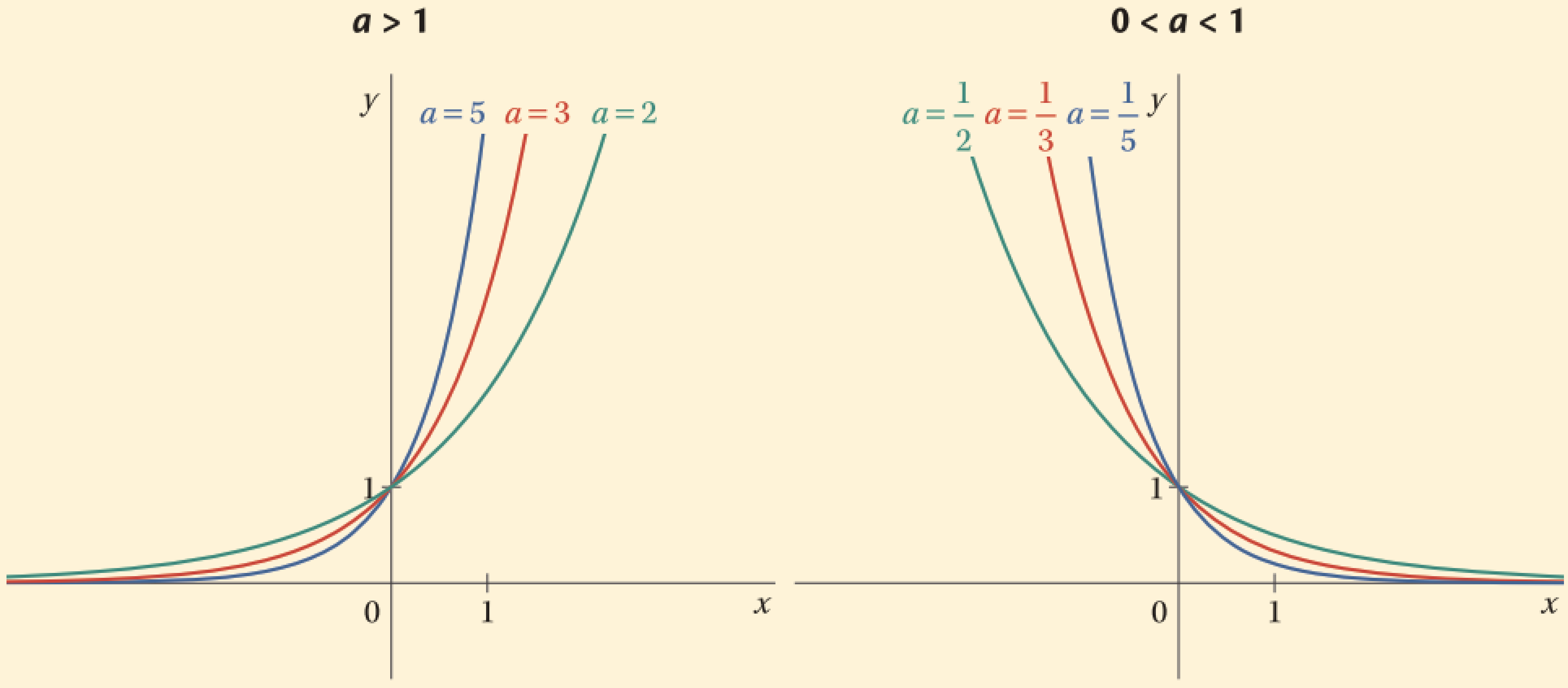
3 Welke grafieken zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de y-as? ....

Waarin verschillen hun voorschriften van elkaar?

....

Grafieken met voorschrift $f(x) = b \cdot a^x$

We onderzoeken de functies met voorschrift $f(x) = b \cdot a^x$ met $b = 1$ voor verschillende waarden van het grondtal a.



We stellen vast dat het grondtal a het verloop van de exponentiële functie bepaalt:

- als $a > 1$, dan is de grafiek stijgend;
- als $0 < a < 1$, dan is de grafiek dalend.

Exponentiële krommen met grondtallen a die elkaars omgekeerde zijn, zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de y-as.

Merk op

Als b negatief is, dan is de grafiek gespiegeld om de x-as.

27

Gegeven zijn negen exponentiële functies.

1 $f(x) = 2^x$	2 $f(x) = 4^x$	3 $f(x) = 0{,}3^x$
4 $f(x) = 0{,}25^x$	5 $f(x) = 0{,}6^x$	6 $f(x) = 8^x$
7 $f(x) = 0{,}125^x$	8 $f(x) = 3^x$	9 $f(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

1 Welke grafieken van deze functies zijn stijgend?

....

2 Welke grafieken van deze functies zijn dalend?

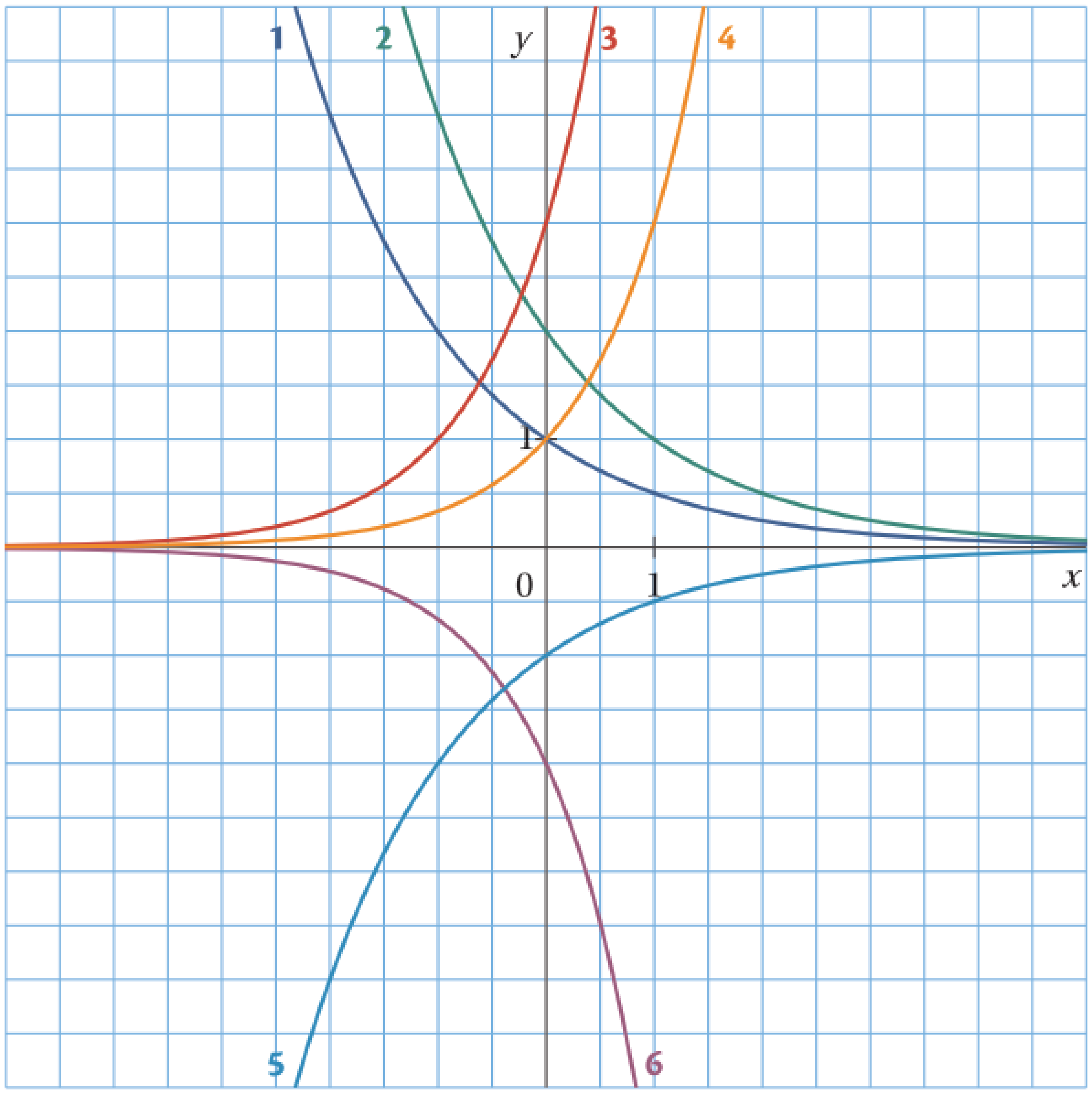
....

3 Welke grafieken van deze functies zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de y-as?

....

28

Gegeven zijn exponentiële krommen en hun bijbehorende functievoorschriften. Schrijf de nummers van de grafieken in de vakjes bij de passende functievoorschriften.



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ☐

$f(x) = -2 \cdot 3^x$ ☐

$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ☐

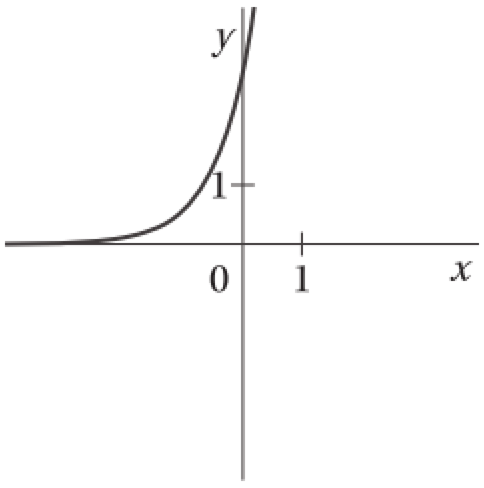
$f(x) = 3 \cdot 3^x$ ☐

$f(x) = 3^x$ ☐

$f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ☐

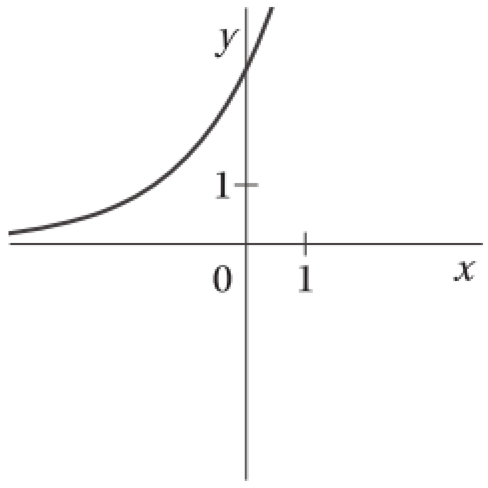
29

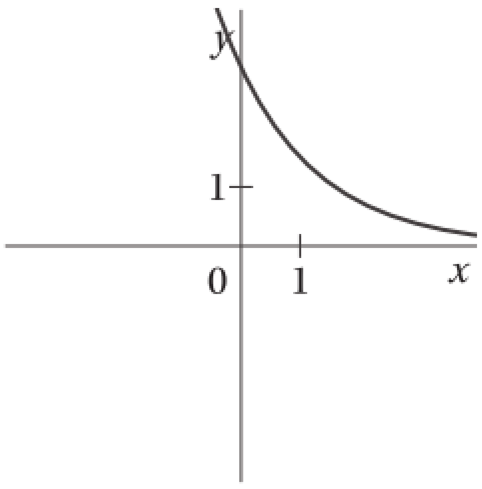
Verbind elke exponentiële kromme met het bijbehorende functievoorschrift.



$f(x) = 3 \cdot 5^x$

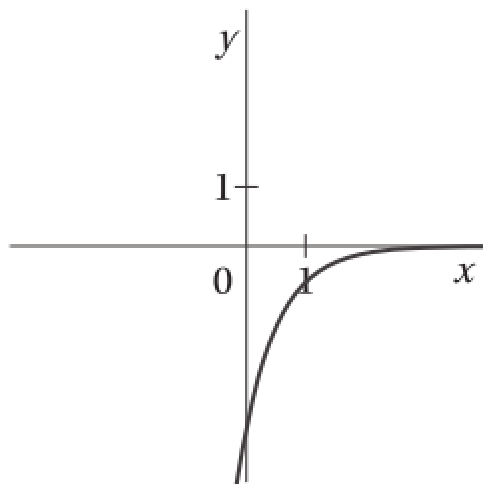
$f(x) = -3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x$

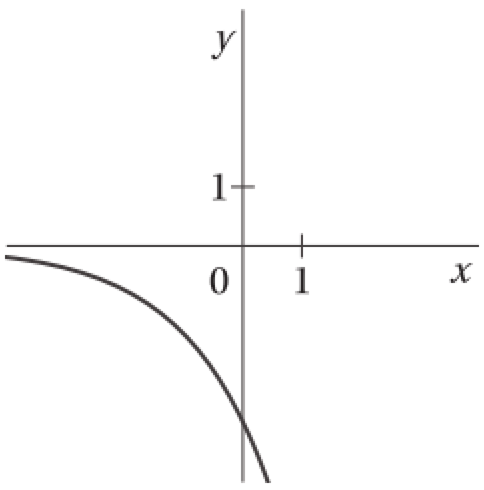




$f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

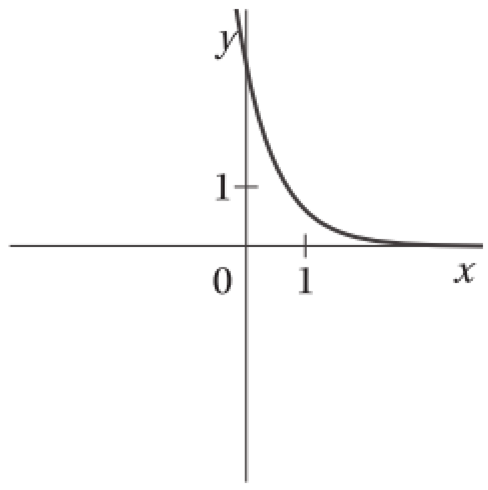
$f(x) = -3 \cdot 2^x$





$f(x) = 3 \cdot 2^x$

$f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x$



30

De grafiek van een exponentiële functie $f(x) = b \cdot a^x$ gaat door de punten P en Q. Bepaal a en b en stel het functievoorschrift op.

1 $P\left(0, \frac{1}{2}\right)$ en $Q\left(1, \frac{3}{2}\right)$

....

....

....

....

....

2 $P\left(-2, -\frac{5}{4}\right)$ en $Q(1, -10)$

Uitdagingen

1 Een passagiersvliegtuig van het type Boeing 747-300 kan 199 000 liter kerosine bevatten en verbruikt op kruissnelheid ongeveer 13 800 liter per uur. Bij vliegtuigen wordt de hoeveelheid brandstof vaak uitgedrukt in kg. Eén liter brandstof komt overeen met een massa van 0,8 kg.



1 Stel een formule op om de resterende inhoud V en massa m van de oorspronkelijk volle tank te berekenen na t tijdseenheden.

a Tijd in uren en inhoud in liter.

b Tijd in uren en massa in kg.

c Tijd in minuten en inhoud in liter.

d Tijd in minuten en massa in kg.

2 Hoeveel liter kerosine bevat de Boeing nog na acht uur vliegen?

3 Om veiligheidsredenen moet een vliegtuig over een brandstofreserve beschikken voor noodlandingen en eventuele uitwijkingen naar andere luchthavens. Kan de Boeing tien uur vliegen indien hij een reserve van 70 000 liter moet overhouden?

2 Er zijn verschillende mogelijkheden om een muntstuk van een euro in stukken van 5 cent en 20 cent te wisselen. De formule beschrijft een verband tussen het aantal stukken van 5 cent en het aantal stukken van 20 cent die samen één euro waard zijn.

$y = 20 - 4x$ x: aantal muntstukken van 20 cent

y: aantal muntstukken van 5 cent

1 Hoeveel vijfcentstukken krijgen we als we twee twintigcentstukken wisselen?

2 Op hoeveel verschillende manieren kunnen we een euro in stukken van 5 cent en 20 cent wisselen?

3 Hoe verandert het aantal vijfcentstukken als het aantal twintigcentstukken met twee afneemt?

4 We wisselen een euro in een gelijk aantal stukken van 5 cent en van 20 cent. Hoeveel stukken hebben we van elke soort?

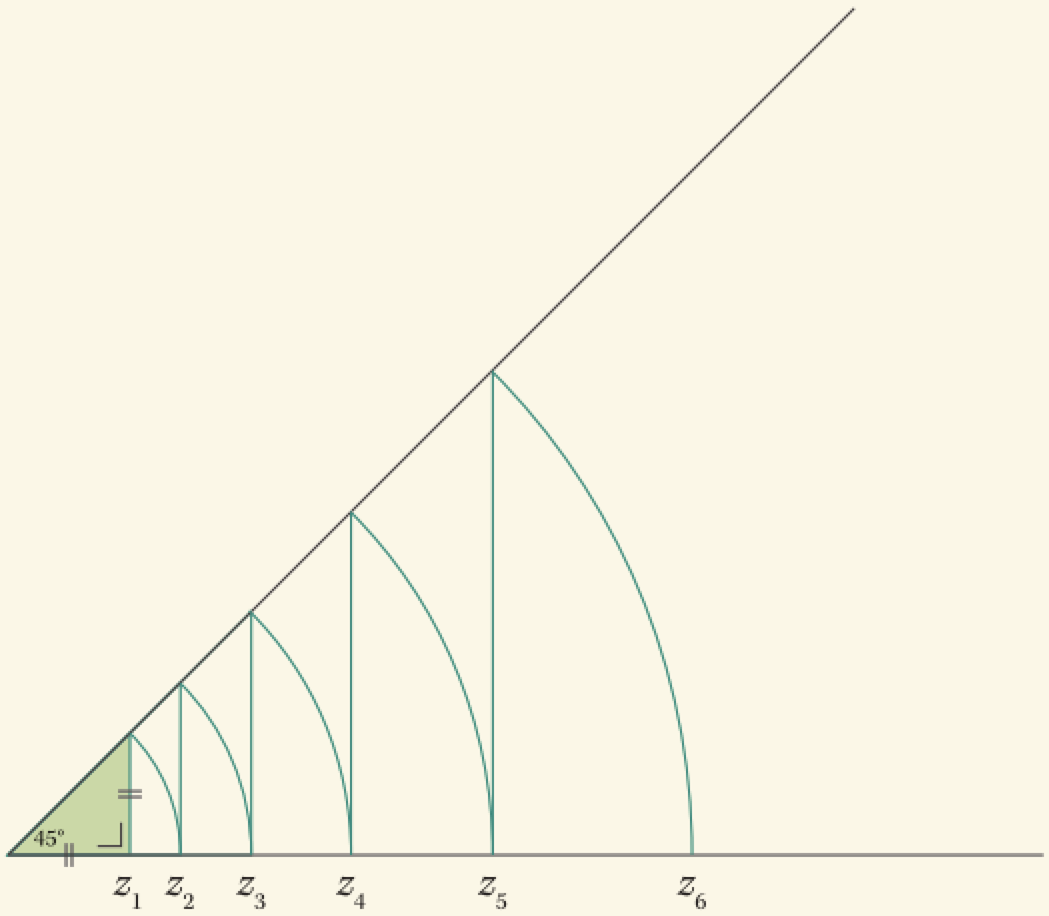
3 Met tegenwind heeft een vliegtuig 40 minuten nodig om van Brussel naar Parijs te vliegen. Een vliegtuig dat tegelijkertijd van Parijs naar Brussel vliegt, heeft voor deze afstand van 270 km slechts 36 minuten nodig.

1. Teken voor beide vluchten de grafiek die de afstand *s* ten opzichte van Brussel in functie van de tijd *t* weergeeft.
2. Hoe groot is de windsnelheid?
3. Wanneer kruisen beide vliegtuigen elkaar?

4 Een wijnvat van 225 liter weegt leeg 54 kg en vol 297 kg.

1. Stel een formule op waarmee we de hoeveelheid wijn *w* in een vat kunnen berekenen, als we de massa *m* van het vat met *w* liter wijn kennen.
2. Hoeveel liter wijn bevatten vaten die 100 kg en 200 kg wegen?
3. Hoeveel weegt een halfvol vat?

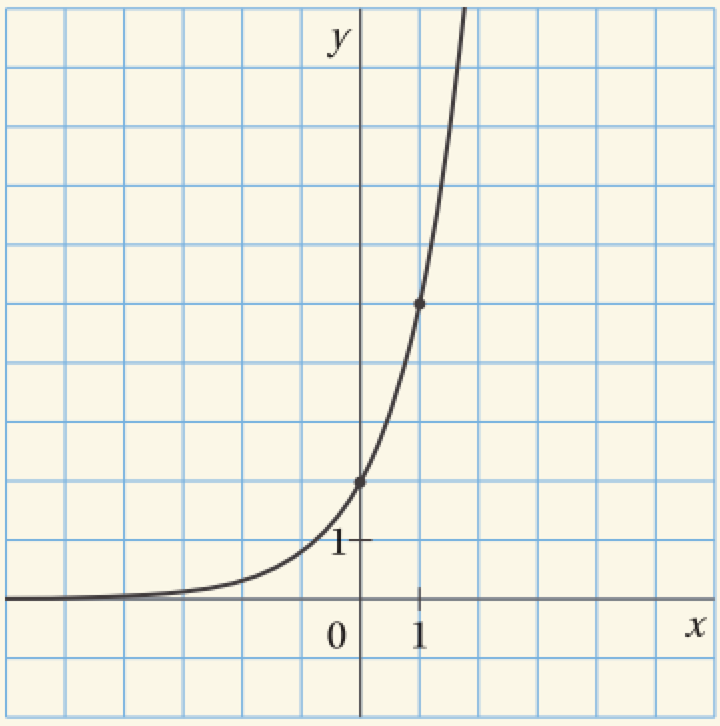
5 Zet de volgende constructie verder tot de rechthoekszijde z_7 van de rij gelijkbenige rechthoekige driehoeken gekend is.



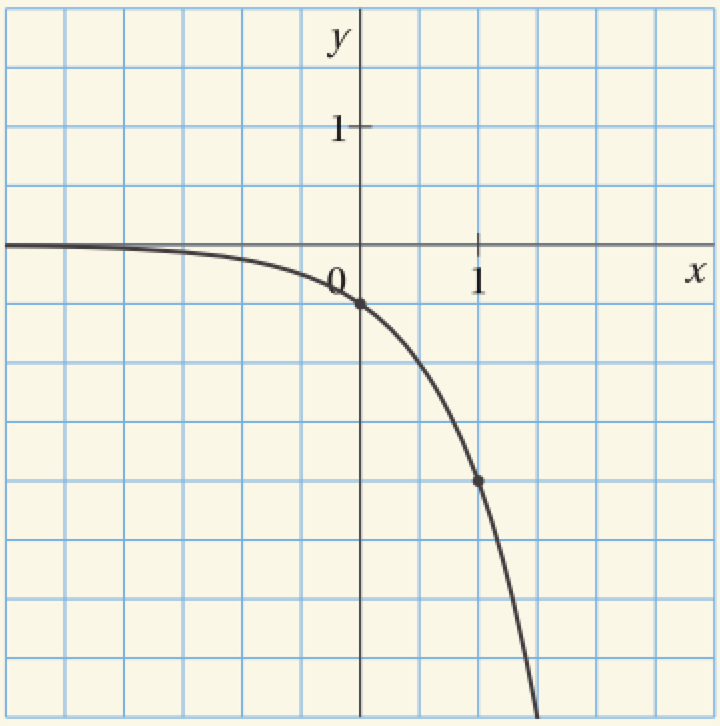
1. Hoe groot is zijde z_2 in functie van z_1?
2. De zijden *z* nemen exponentieel toe. Bepaal het grondtal.
3. Hoe groot is zijde z_7 in functie van z_1?
4. Stel de formule op om de zijde z_n na *n* constructies te berekenen.
5. Bereken de grootte van de rechthoekszijden z_{17} als z_1 gelijk is aan 1 cm.

6 De grafiek behoort bij een exponentiële functie met voorschrift $f(x) = b \cdot a^x$. Bepaal het functievoorschrift.

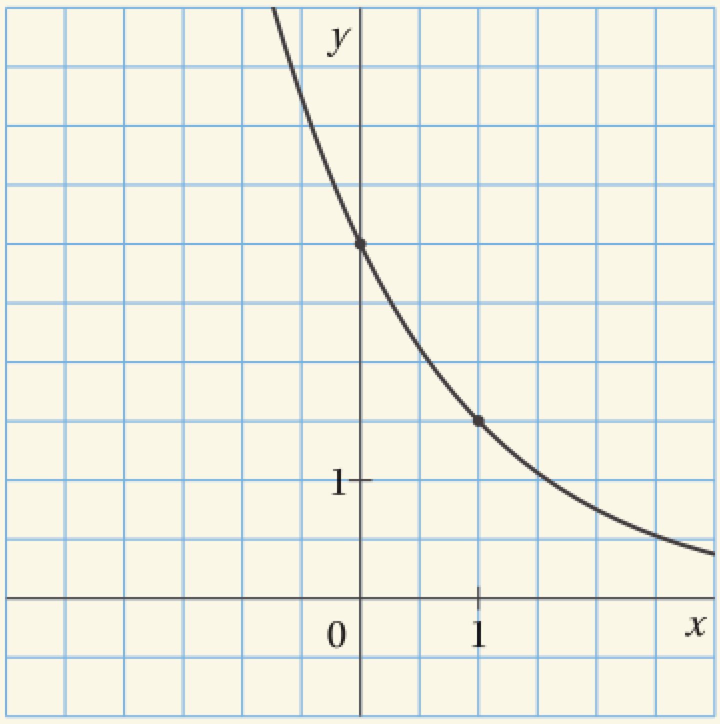
1



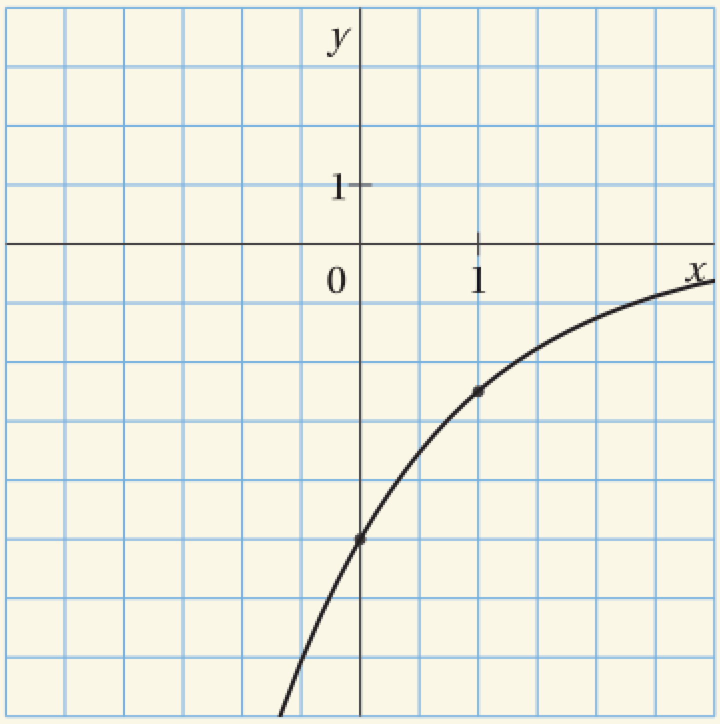
2



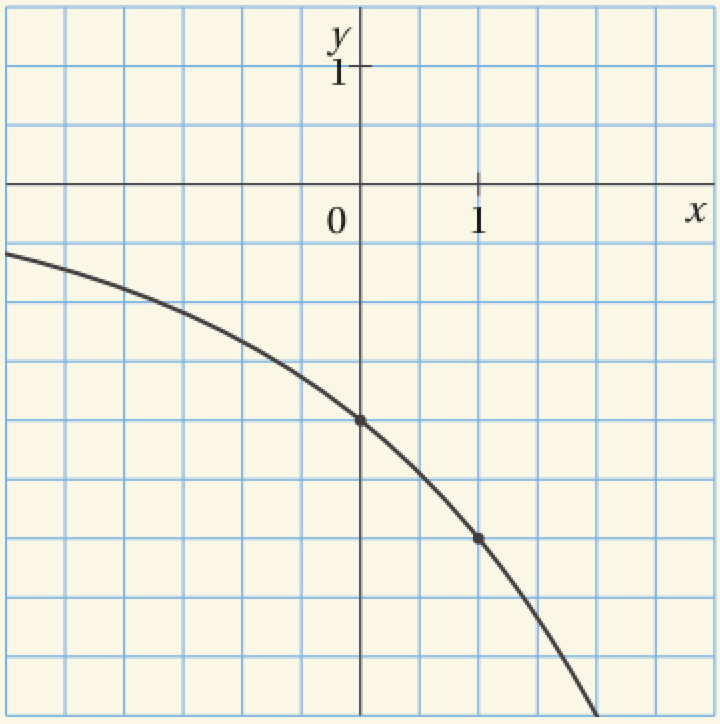
3



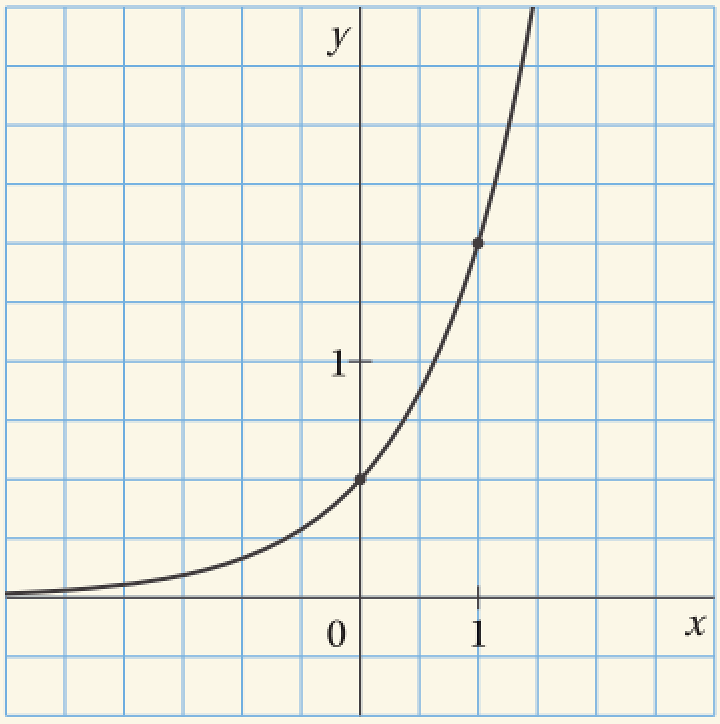
4



5

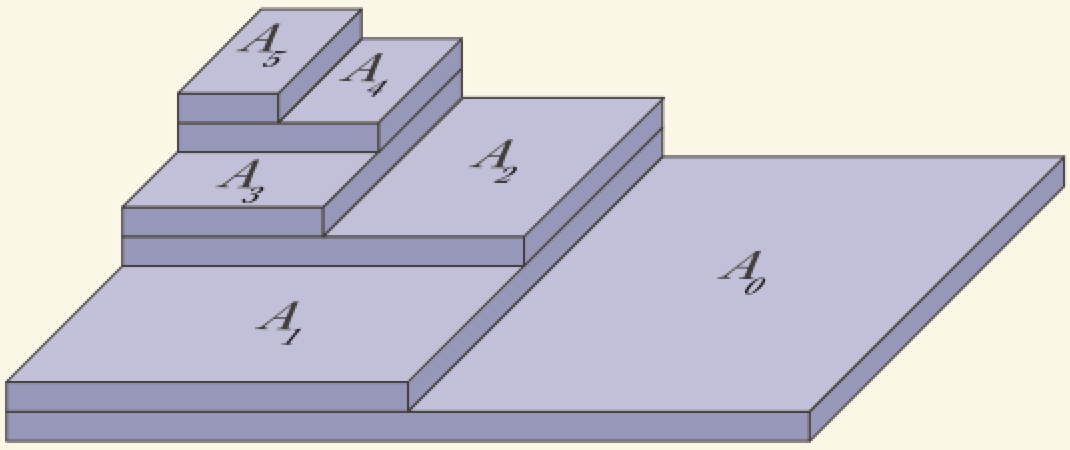


6



7 De standaardafmetingen voor papier zijn internationaal genormaliseerd. De A-reeks heeft A_0 als basisformaat. Dit blad met afmetingen 841 × 1189 mm heeft een oppervlakte van 1 m². De afmetingen van het volgende formaat A_1 vinden we door de langste afmeting van het basisformaat A_0 te halveren. Om de afmetingen van het daaropvolgende formaat A_2 te kennen, halveren we het formaat A_1 op dezelfde wijze.

Stel dat een blad met formaat A_0 een dikte heeft van 0,16 mm en we het blad een aantal keer dubbelvouwen, dan kunnen we de opeenvolgende dikten berekenen.



1 Stel een formule op om de dikte d van een blad met formaat A_n te berekenen door een blad met formaat A_0 n keer dubbel te vouwen.

2 Wat is de dikte van het blad als we een A_4'tje vouwen?

3 In de praktijk kunnen we een blad slechts zeven maal dubbelvouwen. Wat is dan de dikte van dit blad?

4 Veronderstel dat we door het dubbelvouwen van een blad met dikte 0,2 mm hoger dan de Sint-Romboutstoren (97,28 m) in Mechelen willen geraken. Hoeveel maal moeten wij dit blad dan dubbelvouwen?

8 In 2010 voorspelde het ministerie van sociale zaken dat het aantal bejaarden met psychische problemen de komende 15 jaar zou stijgen van 200 000 naar 400 000. Een socioloog stelde twee modellen op voor deze groei in functie van het aantal jaren na 2010: een lineaire groei in model A en een exponentiële groei in model B.

Zijn de beweringen juist of fout?

a Over 3 jaar voorspelt model A 240 000 bejaarden met psychische problemen.

b Over 3 jaar voorspelt model B 240 000 bejaarden met psychische problemen.

c Volgens model B zouden er in 2020 meer bejaarden zijn met psychische problemen dan volgens model A.

d Volgens model B zouden er in 2030 meer bejaarden zijn met psychische problemen dan volgens model A.

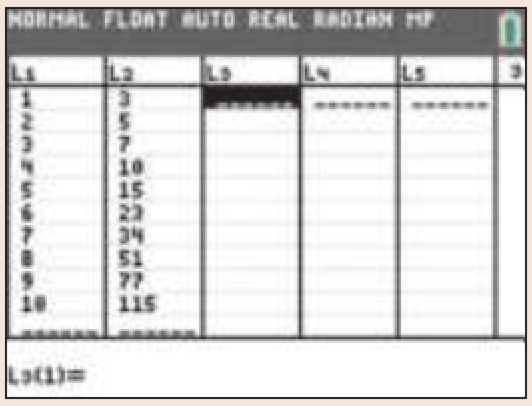
Exploratie

Het M&M's-experiment

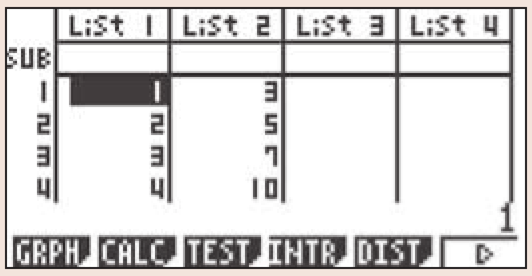
Om dit experiment uit te voeren, hebben we een zakje M&M's nodig, een bekertje en een grafische rekenmachine. We nemen twee M&M's, doen ze in het bekertje, schudden en werpen de M&M's op tafel. Voor elk snoepje dat met de letter 'm' naar boven ligt, nemen we één M&M uit het zakje en leggen het bij de andere snoepjes. Daarna noteren we het aantal M&M's dat op de tafel ligt en doen ze in het bekertje om opnieuw te schudden en te werpen. We voeren minstens 10 worpen uit.



1 Sla in de grafische rekenmachine het volgnummer van elke worp op in lijst 1 en het genoteerde aantal M&M's in lijst 2. Ons experiment geeft het volgende resultaat.

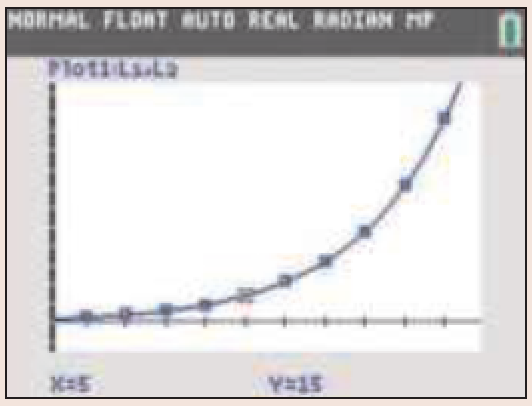


TEXAS INSTRUMENTS

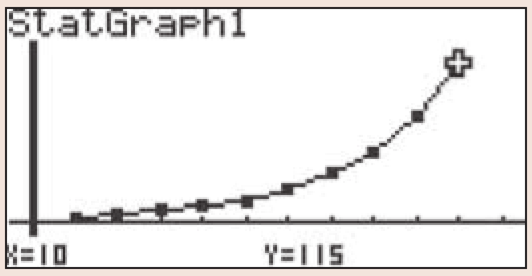


CASIO

2 Plot in het statistisch kijkvenster een lijndiagram waarop we het nummer van de worp en het bijbehorende aantal M&M's kunnen aflezen.

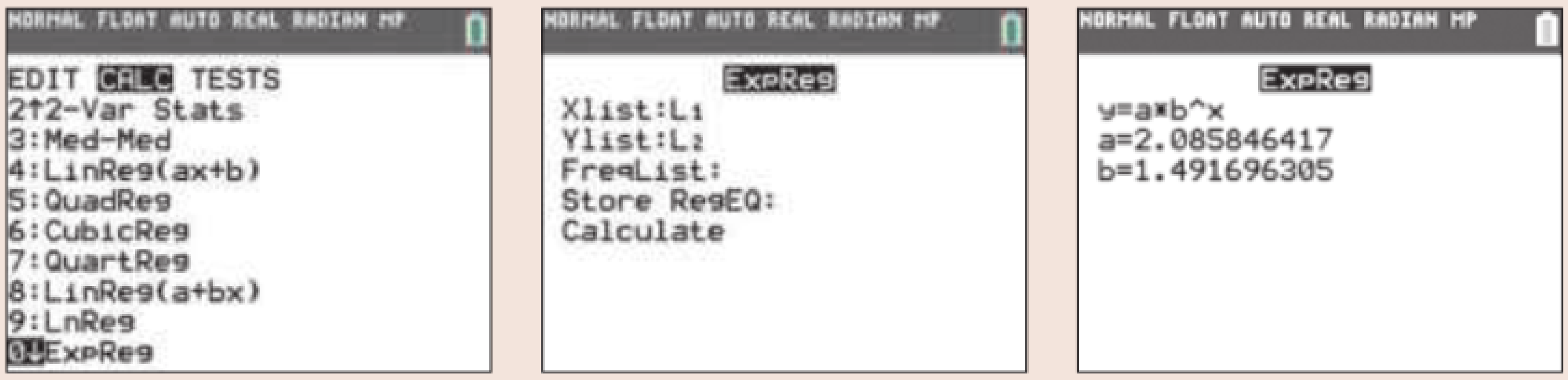


TEXAS INSTRUMENTS

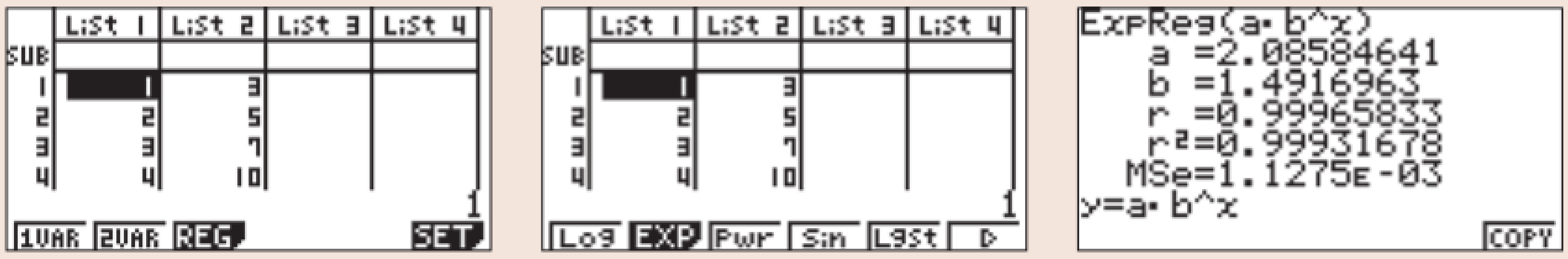


CASIO

3 De grafiek lijkt sterk op een exponentiële kromme.
Om het functievoorschrift te bepalen van een exponentiële kromme die de getekende grafiek zo dicht mogelijk benadert, voeren we met de twee lijsten een 'exponentiële regressie' uit.



TEXAS INSTRUMENTS



CASIO

4 Wat is de beginwaarde van deze exponentiële groei?

5 Wat is de groeifactor van deze exponentiële groei?

6 Met welke exponentiële functie kunnen we het uitgevoerde M&M's-experiment beschrijven?

7 Verklaar het gevonden resultaat.

8 Tijd om te smullen!

2.2 Soorten exponentiële groei

Exponentiële toename

1 Instap

Om de invloed van groeimiddelen bij de teelt van zonnebloemen te onderzoeken, worden de bloemstengels gedurende 8 weken gemeten. In de tabel vinden we enkele meetresultaten.

tijd (weken)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
lengte (cm)	5,2	....	10,4	....	20,8	....	41,6	....	83,2



1 Als we weten dat de groei van een zonnebloem tijdens de eerste 8 weken exponentieel verloopt, wat is dan de groeifactor per veertien dagen?

....

2 Wat is de groeifactor per week? Duid deze groeifactor aan met een vinkje en verklaar.

$\frac{1}{2}$ ☐ $\sqrt{2}$ ☐ -2 ☐ 4 ☐

....

3 Vul de tabel aan met lengten op 0,1 cm nauwkeurig.

4 Stel een formule op om na t weken de lengte l van een zonnebloem te berekenen.

....

5 Na hoeveel dagen verdubbelt de lengte van een zonnebloem?

....

6 In welke week zal de lengte van een zonnebloem vertienvoudigd zijn?

....

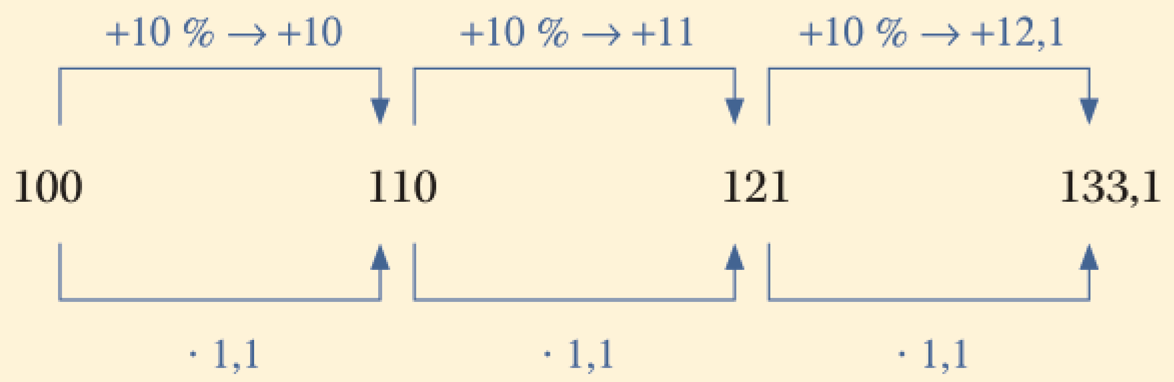
Exponentiële toename

Een exponentiële groei waarbij de **groeifactor groter dan 1** is, noemen we een **exponentiële toename**.

Procentuele toename

Wordt de toename uitgedrukt in procent, dan spreken we van een **procentuele toename**.

Als een hoeveelheid (kapitaal, aantal, massa, lengte, ...) met 10 % per tijdseenheid toeneemt, dan moeten we de hoeveelheid na elke tijdseenheid vermeerderen met 10 % of vermenigvuldigen met 1,10.



Bij een procentuele toename van *p* % per tijdseenheid is de groeifactor $1+\frac{p}{100}$**.**

Verdubbelingstijd

De tijd die nodig is om een bepaalde hoeveelheid te verdubbelen, noemen we de **verdubbelingstijd**.

Voorbeeld

Een kapitaal van 1000 euro wordt uitgezet op samengestelde intrest tegen 3 %. We berekenen het eindkapitaal na 5 jaar en de verdubbelingstijd.

Groeifactor per jaar: $1+\frac{3}{100}=1{,}03$

Eindkapitaal na t jaar: $f(t)=1000\cdot 1{,}03^{t}$

Eindkapitaal na 5 jaar: $f(5)=1000\cdot 1{,}03^{5}=1159{,}274...$

Na 5 jaar is het kapitaal aangegroeid tot 1159,27 euro.

Om de verdubbelingstijd te berekenen, lossen we de volgende exponentiële vergelijking op:

$f(t) = 2 \cdot 1000$

$1000 \cdot 1{,}03^t = 2000$

$1{,}03^t = 2$

$t = {}^{1{,}03}\log 2 = 23{,}449...$

De verdubbelingstijd van het kapitaal is ongeveer 23,4 jaar. Dit betekent dat de eindwaarde van het kapitaal na 24 jaar meer dan 2000 euro zal bedragen.

2

Bepaal de groeifactor en de procentuele toename per tijdseenheid.

1 $f(t) = 3 \cdot 1{,}1^t$

groeifactor: .... procentuele toename: ....

2 $f(t) = 0{,}5 \cdot 1{,}06^t$

groeifactor: .... procentuele toename: ....

3 $f(t) = 1{,}15^t$

groeifactor: .... procentuele toename: ....

4 $f(t) = 2 \cdot 2{,}3^t$

groeifactor: .... procentuele toename: ....

3

Bereken de groeifactor in de gegeven tijdseenheid.

1 Maandelijks stijgt het aantal overtredingen met 3 %. ....

2 Per jaar brengt een zichtrekening 0,5 % intrest op. ....

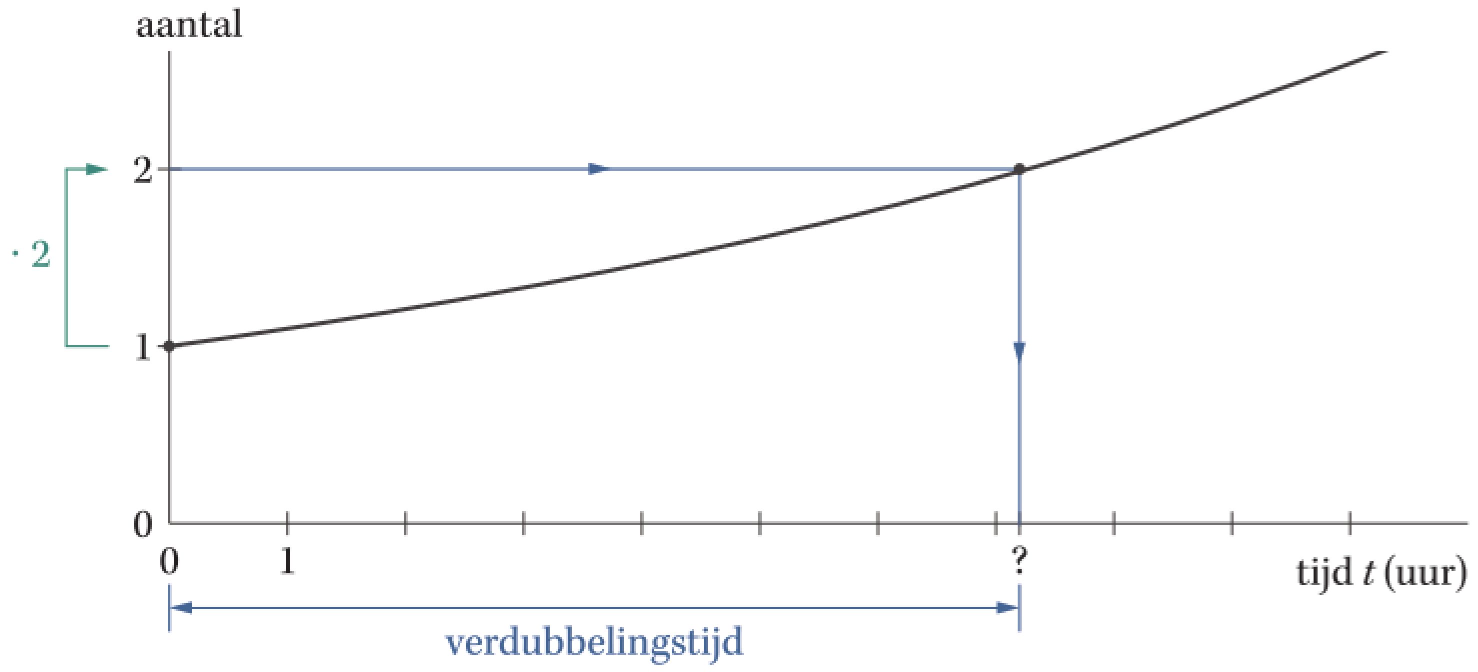
3 Per uur neemt het aantal cellen toe met 200 %. ....

4 Per minuut stijgt de druk met 0,8 %. ....

5 Per dag neemt de bladoppervlakte met 60 % toe. ....

4

Op de grafiek van de exponentiële functie $f(t) = 1{,}1^t$ hebben we de verdubbelingstijd van een groeiproces voorgesteld.



Bereken de verdubbelingstijd van dit groeiproces.

....

....

....

....

5

In een vijver van 400 m² bedekken waterhyacinten een oppervlakte van 20 m². Deze oppervlakte neemt jaarlijks toe met 50 %.



1 Bepaal de groeifactor van de oppervlakte met waterhyacinten per jaar.

....

2 Stel een formule op om de oppervlakte A van de waterhyacinten na t jaar te berekenen.

3 Zullen de waterhyacinten na 7 jaar de vijver volledig bedekken?

4 Na hoeveel jaar zal de vijver voor de helft met deze planten bedekt zijn?

6

Een kapitaal van 2500 euro wordt uitgezet op samengestelde intrest tegen 2 %.

1 Bepaal de jaarlijkse groeifactor van dit kapitaal.

2 Stel een formule op om de eindwaarde K van het kapitaal na n jaar te berekenen.

3 Bereken de eindwaarde van het kapitaal na 10 jaar.

4 Een andere bank belooft een rentevoet van 1 % per halfjaar. Is dit een interessanter aanbod?

7

Bij een temperatuur van 37 °C telt een laborant 24 melkzuurbacteriën. Na 1 uur is het aantal verdrievoudigd.

1 Stel een formule op om het aantal bacteriën n na t uur te berekenen.

....

2 Bereken de verdubbelingstijd in minuten.

....

....

....

....

....

....

8

Ian kweekt een watermeloen. De vrucht weegt momenteel 200 gram. De massa van de meloen neemt per dag toe met 15 %.

1 Stel een formule op om de massa m na t dagen te berekenen.

....

....

2 Ian wil binnen drie weken oogsten. Hoeveel weegt zijn watermeloen dan?

....

....

3 Bereken de verdubbelingstijd.

....

....

....

....

....

9

Afrikaanse rivieren worden vaak geteisterd door een explosieve groei van Salvinia Molesta, een bijzonder agressief soort wateronkruid. De exponentiële groei gaat zo snel dat de plant in korte tijd rivieren kan bedekken en hierdoor de scheepvaart haast onmogelijk maakt.

1 Bepaal de groeifactor als de bladoppervlakte dagelijks aangroeit met 40 %.

....

2 Stel dat het bedekte wateroppervlak op een bepaald ogenblik één hectare groot is. Na hoeveel uren zal de overwoekerde wateroppervlakte verdubbeld zijn?

....

....

....

....

10

De grootouders van Alice willen haar een bedrag van 2500 euro geven voor haar 18e verjaardag. Zij openen hiervoor bij de geboorte een spaarrekening met een rentevoet van 2 %.

1 Stel een formule op om de eindwaarde K van een kapitaal k na t jaar te berekenen.

....

....

2 Welk kapitaal k moeten de grootouders op de spaarrekening storten bij haar geboorte?

....

....

....

....

3 Bereken de verdubbelingstijd van de spaarrekening.

....

....

....

....

....

11

Een cultuur telt 2000 bacteriën. Bij zeer gunstige omstandigheden splitst elke bacterie zich om de 20 minuten in 2 nieuwe bacteriën.

1 Bepaal de groeifactor van deze cultuur per 20 minuten en per minuut.

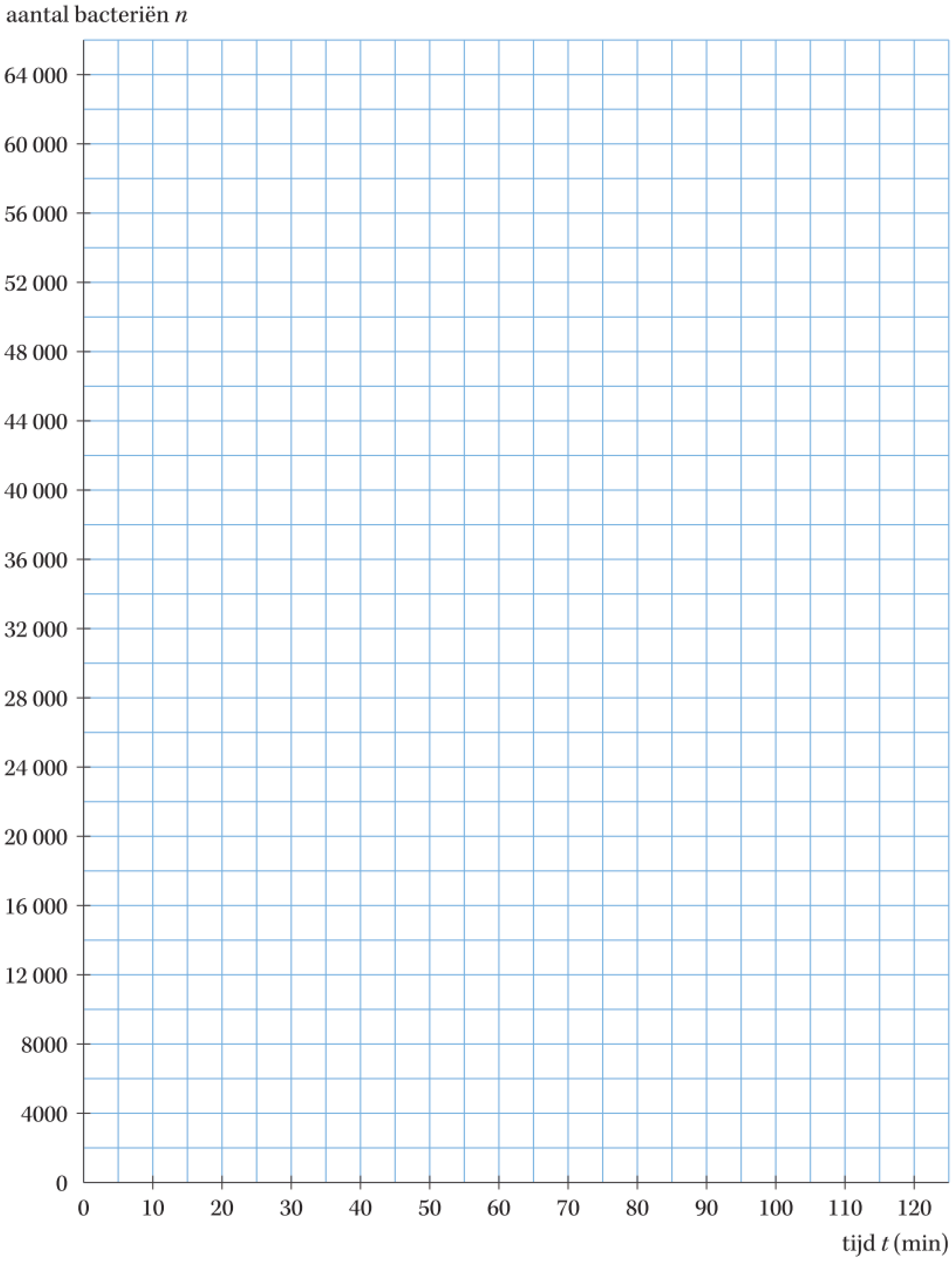
....

....

2 Stel een formule op om het aantal bacteriën n na t minuten te berekenen.

....

3 Teken de grafiek van de bijbehorende exponentiële functie.



4 Wat is de verdubbelingstijd van het aantal bacteriën?

....

5 Hoeveel bacteriën zijn er na 1 uur en 40 minuten?

....

6 Hoeveel bacteriën waren er 1 uur voordat de cultuur 2000 bacteriën bevatte?

....

Exponentiële afname

12 Instap

Een stel buisleidingen dat een geconcentreerde HCl-oplossing of zoutzuur bevat, wordt met water schoongespoeld. Tijdens het spoelen meten we op een gegeven moment dat de leidingen nog 100 liter zoutzuur bevatten. De volgende minuut is dat nog 20 liter en elke volgende minuut wordt 80 % van het zoutzuur vervangen door water.



1 Het schoonspoelen van de leidingen is een exponentieel proces. Wat is de groeifactor per minuut?

....

....

2 Hoeveel zoutzuur blijft er in de leidingen over op de gegeven tijdstippen? Vul de tabel aan.

tijd t (min)	0	1	2	3	4
volume zoutzuur V (liter)	100	20	....	....	....

3 Stel een formule op om na t minuten het volume zoutzuur V in liter te berekenen.

....

4 Hoeveel milliliter zoutzuur bevatten de leidingen nog na 10 minuten spoelen?

....

....

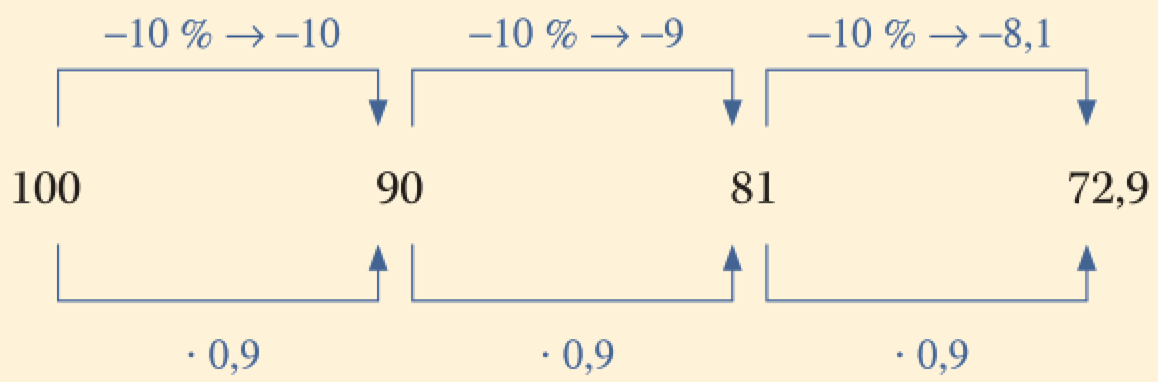
Exponentiële afname

Een exponentiële groei waarbij de **groeifactor kleiner dan 1** is, noemen we een **exponentiële afname** of een **exponentieel verval**.

Procentuele afname

Wordt de afname uitgedrukt in procent, dan spreken we van een **procentuele afname** of een **procentueel verval**.

Als een hoeveelheid (kapitaal, aantal, massa, lengte, ...) met 10 % per tijdseenheid afneemt, dan moeten we de hoeveelheid na elke tijdseenheid verminderen met 10 % of vermenigvuldigen met 0,90.



Bij een procentuele afname van *p* % per tijdseenheid is de groeifactor $\mathbf{1 - \frac{p}{100}}$.

Halveringstijd

De tijd die nodig is om een bepaalde hoeveelheid te halveren, noemen we de **halveringstijd**.

Voorbeeld

Een oude fietsband bevat 13 gram lucht en verliest per dag 8 % lucht. We berekenen de massa lucht in de band na 5 dagen en de halveringstijd.

Groeifactor per dag: $1 - \frac{8}{100} = 0{,}92$

Massa lucht in de band na t dagen: $f(t) = 13 \cdot 0{,}92^t$

Massa lucht in de band na 5 dagen: $f(5) = 13 \cdot 0{,}92^5 = 8{,}568...$

Na 5 dagen is er nog 8,6 gram lucht in de band.

Om de halveringstijd te berekenen, lossen we de volgende exponentiële vergelijking op:

$f(t) = \frac{1}{2} \cdot 13$

$13 \cdot 0{,}92^t = 6{,}5$

$0{,}92^t = 0{,}5$

$t = {}^{0{,}92}\log 0{,}5 = 8{,}312...$

De halveringstijd van de massa lucht is ongeveer 8,3 dagen. Dit betekent dat de band na 9 dagen minder dan 6,5 gram lucht zal bevatten.

13

Bepaal de groeifactor en de procentuele afname per tijdseenheid.

1 $f(t) = 5 \cdot 0{,}85^t$

groeifactor: .... procentuele afname: ....

2 $f(t) = 100 \cdot 0{,}997^t$

groeifactor: .... procentuele afname: ....

3 $f(t) = 12\,000 \cdot 0{,}9^t$

groeifactor: .... procentuele afname: ....

4 $f(t) = 6 \cdot 0{,}25^t$

groeifactor: .... procentuele afname: ....

14

Bereken de groeifactor in de gegeven tijdseenheid.

1 Per minuut koelt een bord soep af met 20 %. ....

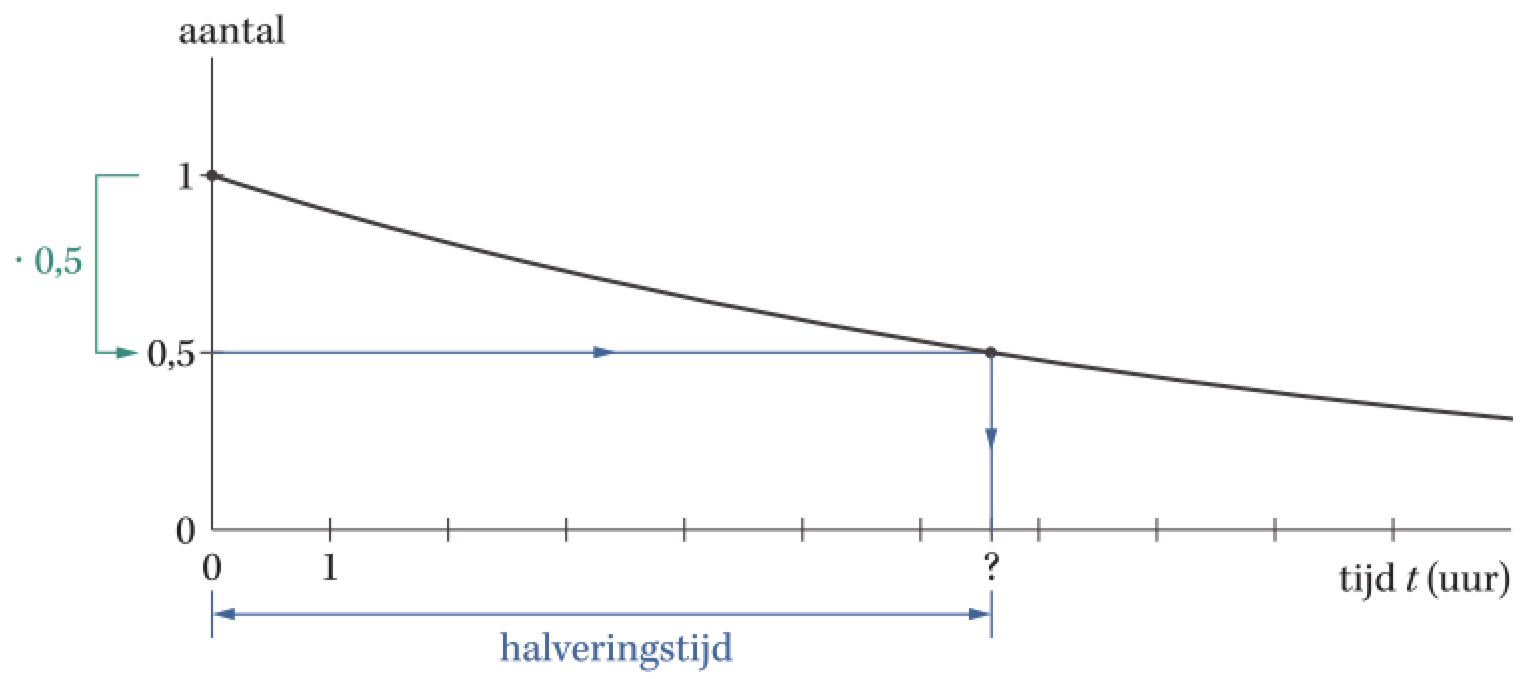
2 Elk jaar wordt 1,8 % van het regenwoud gekapt. ....

3 Per decennium daalt het aantal geboorten met 12 %. ....

4 Per uur vervluchtigt $\frac{4}{25}$ van een openstaand flesje eau de cologne. ....

15

Op de grafiek van de exponentiële functie $f(t) = 0{,}9^t$ hebben we de halveringstijd van een groeiproces voorgesteld.



Bereken de halveringstijd van dit groeiproces.

....

....

....

....

16

Een goed opgepompte fietsband bevat 12 g lucht en verliest per minuut 5 % lucht.

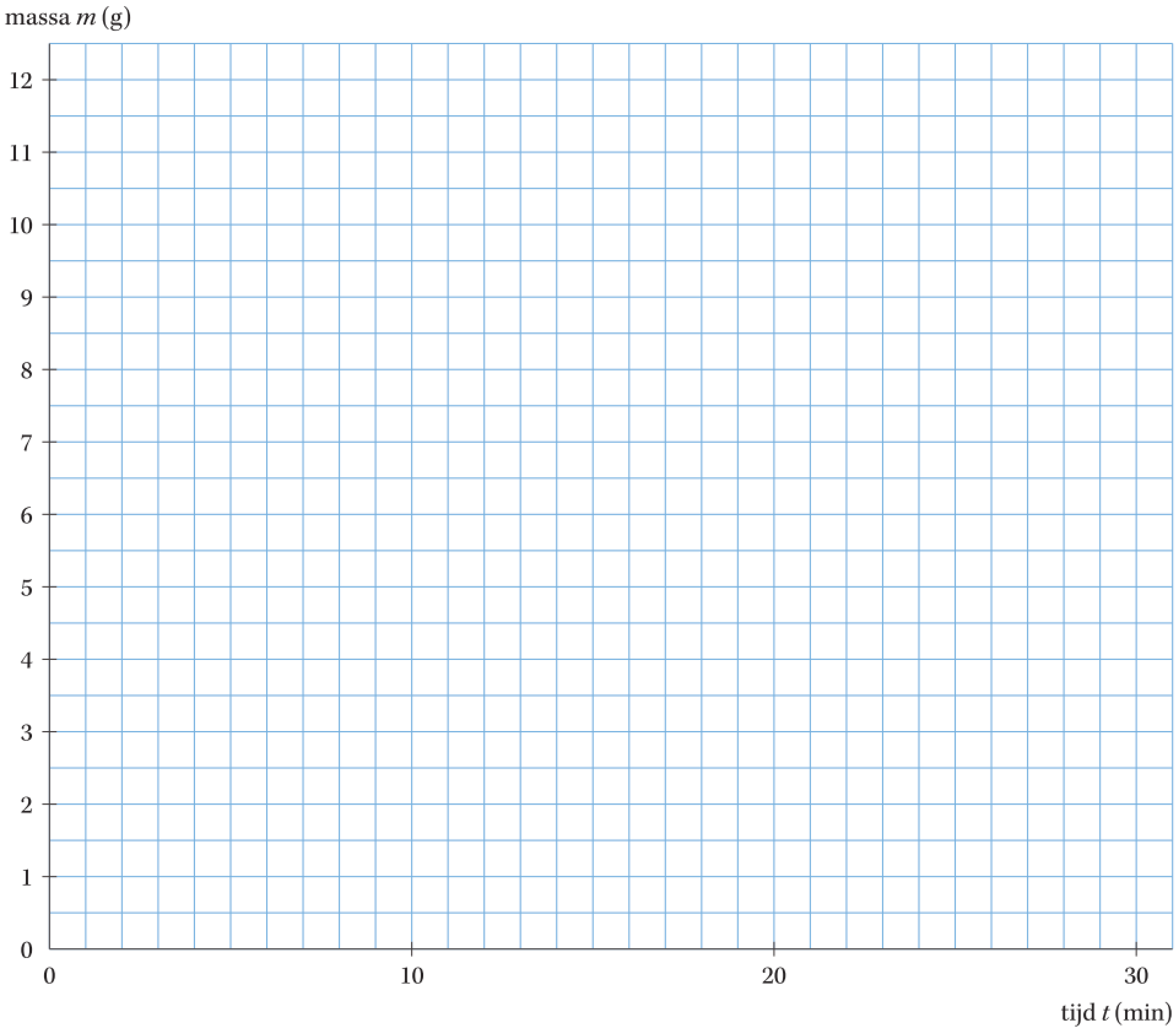
1 Bepaal de groeifactor per minuut van de massa lucht in de fietsband.

....

2 Stel een formule op om de massa m van de lucht in de band na t minuten te berekenen.

....

3 Teken de grafiek van de bijhorende exponentiële functie.



4 Hoeveel lucht bevat de band nog na 10 minuten?

5 Als de band minder dan 4 gram lucht bevat, stoppen we om bij te pompen. Moeten we onderweg halt houden als we op 25 minuten van de school wonen? Zo ja, wanneer?

6 Hoelang kunnen we fietsen als we tweemaal stoppen om de fietsband bij te pompen?

7 Bereken de halveringstijd.

17

Na de slechte berichten op de beurs daalde de BEL20-index exponentieel met 5 % per dag.

1 Bereken de groeifactor en de procentuele afname per week.

2 Bereken de groeifactor en de procentuele afname per uur.

18

Een luchtschip voor reclamedoeleinden is gevuld met 5000 liter heliumgas. Het gasverlies bedraagt ongeveer 0,2 % per dag.



1 Bepaal de dagelijkse groeifactor van het gasvolume in het luchtschip.

2 Stel een formule op om het volume *V* van het heliumgas na *t* dagen te berekenen.

3 Hoeveel liter gas bevat het luchtschip nog na 2 weken?

4 Bereken de halveringstijd.

5 Het luchtschip heeft minstens 3500 liter gas nodig om in de lucht te blijven. Na hoeveel dagen moet er terug heliumgas worden toegevoegd?

19

In helder water vermindert de lichtintensiteit met de helft telkens we 5 meter dieper duiken. Aan de oppervlakte is de lichtintensiteit 100 %.



1 Stel een formule op om de lichtintensiteit I uitgedrukt in procent, op een diepte van d meter te berekenen.

....

....

....

2 Bereken de lichtintensiteit op 12 m diepte.

....

....

3 Tot op welke diepte kunnen we met een onderwatercamera nog goede foto's maken als we minstens 25 % daglicht nodig hebben?

....

....

....

....

....

....

....

4 Onderwaterplanten hebben 0,0001 % daglicht nodig om te overleven. Tot op welke diepte kunnen we nog planten aantreffen?

20

Een gebied werd geteisterd door een konijnenplaag. In 2011 werden vossen uitgezet om het aantal konijnen te verminderen. De tabel toont de resultaten van de jaarlijkse tellingen.

jaar	2011	2012	2013	2014
aantal konijnen	1500	1200	960	768

1 Is de afname van het aantal konijnen in het gebied exponentieel?

2 Met welk percentage nam het aantal konijnen jaarlijks af?

3 Stel een formule op om t jaar na 2011 het aantal konijnen n te berekenen.

4 Als we stellen dat deze trend zich voortzet, in welk jaar zullen er dan voor het eerst minder dan 300 konijnen zijn?

21

Laura koopt tijdens het autosalon een DELTA-TURBO voor 22 330 euro. Omdat een DELTA op de tweedehandsmarkt heel gegeerd is, zal Laura de auto gemakkelijk kunnen verder verkopen. De DELTA-TURBO zal per jaar met slechts 15 % in waarde dalen.

1 Stel een formule op om de verkoopprijs p na t jaar te berekenen.

2 Wat is de restwaarde van de auto na 5 jaar?

3 Na hoeveel jaar is de auto tot de helft van de aankoopwaarde gedaald?

4 Wanneer is de DELTA-TURBO van Laura tweedehands nog 5000 euro waard?

22

Op een zonnige maar kille winterdag is het buiten precies 0 °C. Katrijn besluit om de buitenkant van de ramen te lappen en vult een emmer met water. Het water heeft een temperatuur van 54 °C. Na 5 minuten is de temperatuur gedaald tot 36 °C, na 10 minuten tot 24 °C en na 15 minuten tot 16 °C.

1 De temperatuur van het water neemt exponentieel af. Wat is de groeifactor per 5 minuten? En per minuut?

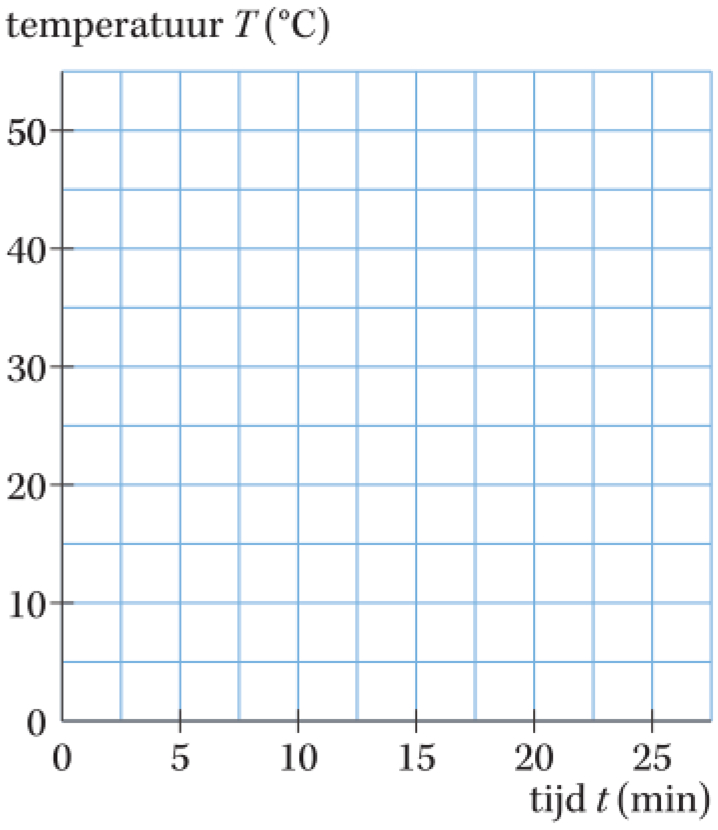
....

....

2 Stel een formule op om de temperatuur T van het water na t minuten te berekenen.

....

3 Teken de grafiek van de bijbehorende exponentiële functie.





4 Katrijn besluit om te stoppen met schoonmaken als de temperatuur van het water lager is dan 10 °C. Hoeveel ramen heeft Katrijn gelapt als ze gemiddeld 7 minuten nodig heeft voor één raam?

....

....

....

....

....

....

23

Van het radioactieve element radium vermindert het oorspronkelijke aantal radioactieve kernen n_0 met 0,046 % per jaar.

1 Bepaal de groeifactor per jaar van het aantal radioactieve kernen.

....

2 Stel een formule op om het aantal radioactieve kernen n na t jaar te berekenen.

....

3 Bereken de halveringstijd van radium.

....

....

....

....

....

24

Een goed ingeschonken glas bier heeft een mooie schuimkraag van 2 cm. Meteen na het inschenken neemt de hoogte van de kraag af met 25 % per minuut.

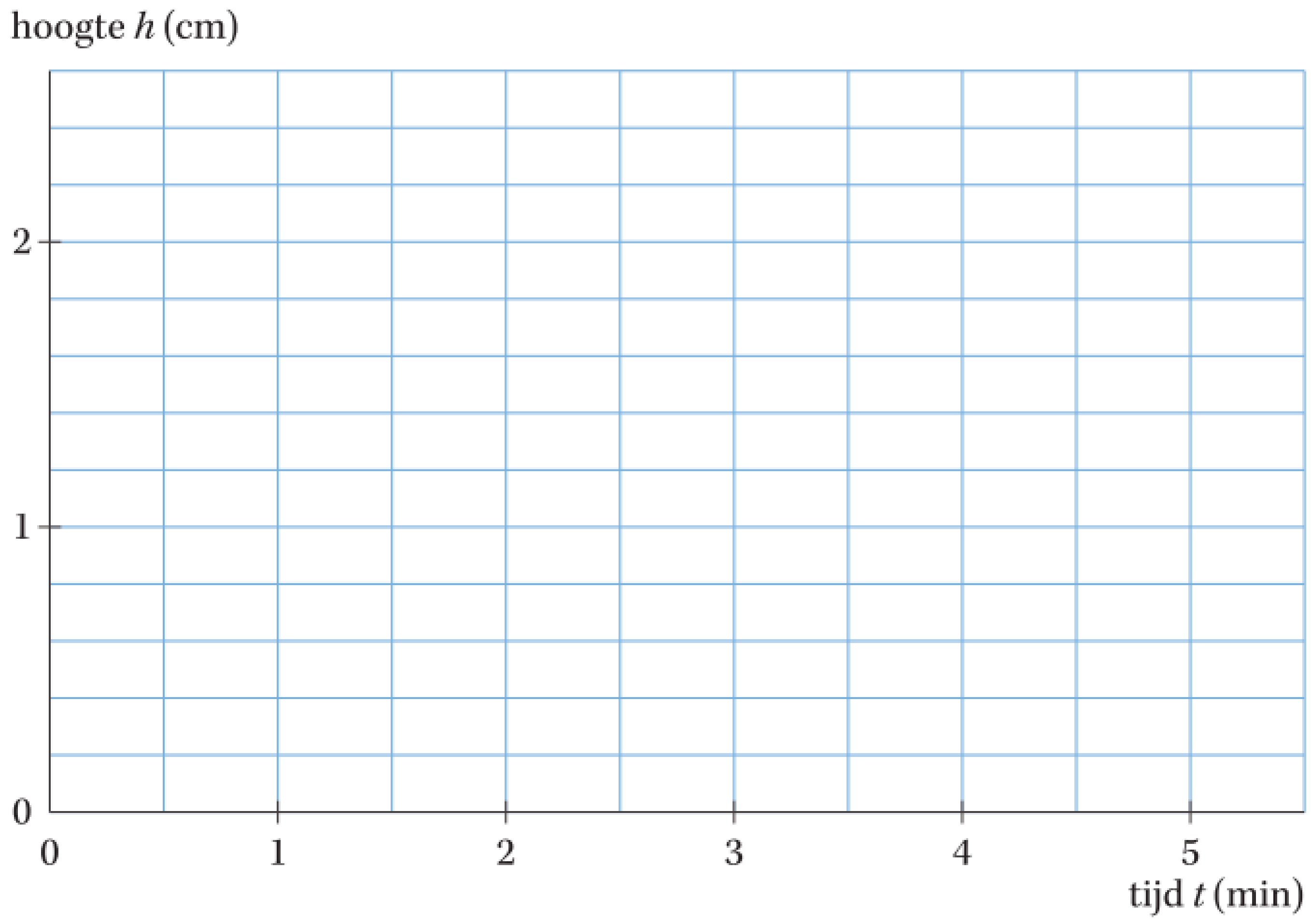


1 Stel een formule op om de hoogte h van de schuimkraag na t minuten te berekenen.

....

....

2 Schets de grafiek van de bijbehorende exponentiële functie.



3 Duid op de grafiek de halveringstijd van de hoogte van de schuimkraag aan.
Bereken de halveringstijd.

....

....

....

....

....

....

4 Na hoeveel tijd is de kraag minder dan 5 mm hoog?

....

....

....

....

....

....

25

Begin mei 2013 ontspoorde in Wetteren een Duitse goederentrein. In drie gekantelde wagons zat acrylonitril. Deze giftige en licht ontvlambare stof werd door de omwonenden in het bloed opgenomen.



1 Als we de beginconcentratie acrylonitril voorstellen met C_0 en de groeifactor per dag met a, stel dan een formule op om de concentratie C na t dagen te berekenen.

....

2 De halveringstijd van acrylonitril is 76 dagen. Bereken de groeifactor per dag. Rond af op 4 decimalen.

....

....

....

....

....

3 Bereken de procentuele afname per dag van de concentratie acrylonitril.

....

....

Uitdagingen

1 Colibacteriën spelen een belangrijke rol bij het verteren van voedsel. Bij een constante temperatuur nemen deze bacteriën exponentieel toe.

1. Een laborant onderzoekt een staal en noteert de meetresultaten in een tabel. Door een ongelukje maakt een bijtend zuur vijf meetresultaten onleesbaar. De laborant kan de ontbrekende waarden berekenen zonder de proef te moeten overdoen.

   Vul de tabel aan.

tijd t (min)	0	15	20	30	40	45	60
aantal colibacteriën n	312						1872

2. Stel een formule op om het aantal colibacteriën n na t minuten te berekenen.
3. Na hoeveel minuten is het aantal colibacteriën bij deze temperatuur vertienvoudigd?

2 Enes vertelt een geheimpje aan Milan. Na één minuut vertellen zowel Enes als Milan het geheim verder aan één van de 27 klasgenoten. Na weer één minuut vertelt iedereen die het geheim van Enes kent, het aan iemand die nog niet op de hoogte is.

1. Stel een formule op om het aantal leerlingen n die Enes' geheim kennen na t minuten, te berekenen.
2. Na hoeveel minuten is de hele klas op de hoogte?
3. Hoelang duurt het tot alle 1183 leerlingen van de school Enes' geheim kennen?

3 Op 12 oktober 1999 werd volgens de Verenigde Naties de 6 miljardste mens geboren. De groei van de wereldbevolking neemt exponentieel toe. Twaalf jaar later, op 31 oktober 2011, zijn we met 7 miljard.

1. Bereken de jaarlijkse groeifactor en procentuele toename.
2. Stel een formule op om t jaar na 1999 het aantal wereldburgers n in miljard te berekenen.
3. Vul de tabel aan met het aantal mensen dat onze planeet vermoedelijk zal tellen indien deze trend zich blijft voortzetten. Rond af op 2 decimalen.

jaar	2020	2030	2040	2050
wereldbevolking (miljard)				

4 In welk jaar zal de wereldbevolking het aantal van 8 miljard overschrijden?

5 In welk jaar zal de wereldbevolking dubbel zo groot zijn als in 1999?

4 Elke ochtend om 7.30 uur krijgt Jules 5 milliliter van een geneesmiddel via een injectie toegediend. De werkzame hoeveelheid van het geneesmiddel neemt exponentieel af met 15 % per uur.



1 Bepaal de groeifactor per uur van dit exponentieel proces.

2 Stel een formule op om t uur na de toediening het werkzame volume V van het geneesmiddel te berekenen.

3 Bepaal de halveringstijd van de werkzame hoeveelheid van het geneesmiddel.

4 Hoeveel procent van het geneesmiddel is nog werkzaam op het moment dat Jules een volgende injectie krijgt?

5 De temperatuur T van een kop thee berekenen we met de formule $T = 50 \cdot 0{,}85^{t} + 20$ waarin t de tijd in minuten na het inschenken voorstelt.

1 Wat is de temperatuur van de thee bij het inschenken?

2 Teken de grafiek van de exponentiële functie.

3 Hoelang duurt het vooraleer de thee afgekoeld is tot 30 °C?

4 Wat is de temperatuur van de thee na 1 uur? En na 2 uur?

5 Wat is de omgevingstemperatuur?

6 Wat is het voorschrift van de horizontale asymptoot van de grafiek?

7 Teken de asymptoot.

6 Op 11 maart 2011 vond in Japan een aardbeving plaats met magnitude 8,9 op de schaal van Richter. De beving veroorzaakte een vernietigende tsunami met vloedgolven tot 14 meter hoog. De regio Fukushima werd het zwaarst getroffen en de aanwezige kerncentrale raakte zwaar beschadigd met een kernramp tot gevolg. Door explosies in de reactoren kwam het radioactief materiaal cesium-137 vrij. In een straal van 20 km rond Fukushima werden 200 000 mensen geëvacueerd.

De vrijgekomen energie E in joule bij deze beving kunnen we berekenen met de formule $E = 25\,000 \cdot 10^{\frac{3M}{2}}$ waarbij M de magnitude van de aardschok voorstelt.

1 Bereken de hoeveelheid vrijgekomen energie.

2 Is een aardbeving met magnitude 8 op de schaal van Richter dubbel zo sterk als een beving met magnitude 4?

3 Als we de beginconcentratie cesium-137 voorstellen met C_0 en de groeifactor per jaar met a, stel dan een formule op om de concentratie C na t jaar te berekenen.

4 De halveringstijd van cesium-137 is 30 jaar. Bereken de groeifactor per jaar. Rond af op 4 decimalen.

5 Hoeveel bedraagt het procentueel radioactief verval per jaar?

6 Veronderstel dat de bodem 52 maal de maximale toegestane concentratie van cesium-137 bevat. Na hoeveel tijd kan de bodem dan terug veilig bewerkt worden?

7 Veronderstel dat de concentraties in het bloed van stof A en van stof B omgekeerd evenredig zijn en positief. Als de concentratie van stof A met p % toeneemt, dan zal de concentratie van stof B afnemen met:

(A) $p\,\%$ (B) $\frac{p}{1+p}\,\%$ (C) $\frac{100p}{100+p}\,\%$ (D) $\frac{p}{100+p}\,\%$

toelatingsexamen arts

Exploratie

De lijkwade van Turijn en de koolstof-14-methode

Miljoenen bedevaarders en toeristen bezochten ooit in de kathedraal van San Giovanni Batista de beroemde lijkwade van Turijn: een linnen kleed met daarop een afdruk van de gekruisigde Christus. In 1989 werden kleine stukken van het plantaardig weefsel geknipt en verdeeld over labo's in Oxford, Arizona en Zurich. Met behulp van de koolstof-14-methode heeft men de leeftijd van de lijkwade proberen te achterhalen. Ter controle werden bij deze stukken ook textielweefsels gevoegd waarvan men wist dat ze van de eerste, elfde en veertiende eeuw waren. Het resultaat van dit onderzoek was dat het doek met 95 % zekerheid gemaakt is tussen 1260 en 1390. Hoe de middeleeuwse vervalser deze perfecte afdruk van de bebloede man vervaardigde, blijft voorlopig nog een raadsel. Hoe dan ook blijft het de meest indrukwekkende visuele voorstelling van het lijden van Christus.



Hoe werkt de koolstof-14-methode?

Elk levend organisme bevat een zeer kleine hoeveelheid van het radioactieve koolstof-14. Als het organisme dood is, daalt de concentratie van dit radioactieve element door straling slechts met 0,012 % per jaar zodat na vele duizenden jaren nog kleine maar meetbare hoeveelheden overblijven. Aan de hand van de gemeten concentratie kunnen we de ouderdom van het organisme bepalen. Deze methode voor ouderdomsbepaling staat bekend als de koolstof-14-methode.

Met deze methode kunnen we bijvoorbeeld de ouderdom van een plantaardig weefsel, een oud bot of een stuk hout bepalen en dus ook voorwerpen van steen of aardewerk die bij die oude botten of stukken hout gevonden zijn.

1. De halveringtijd van koolstof-14 is 5730 jaar. Wat is de groeifactor per jaar? Rond af op 6 decimalen.
2. Wat is de procentuele afname per jaar?
3. Als we voor een organisme de beginconcentratie koolstof-14 voorstellen met C_0, stel dan een formule op om de concentratie C te berekenen t jaar na het afsterven.
4. Als we stellen dat de lijkwade nu 2000 jaar oud is, welk percentage van de beginconcentratie koolstof-14 zouden we dan moeten meten?
5. In 1989 werd in het plantaardig weefsel van het kleed 92 % van de beginconcentratie koolstof-14 gemeten. Van welk jaar dateert de lijkwade van Turijn?

Trefwoordenregister



5/6

ISBN 978-90-301-4288-1